TRẦN BÌNH

GIẢI TÍCH II & III

Phép tính vi phân và tích phân của hàm nhiều biến

DÙNG CHO SINH VIÊN KỸ THUẬT, CAO ĐẲNG, ĐẠI HỌC, SAU ĐẠI HỌC

NHÀ XUẤT BẢN
KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TRẦN BÌNH

GIẢI TÍCH II + III

PHÉP TÍNH VI PHÂN & TÍCH PHÂN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Dùng cho sinh viên kỹ thuật
(Cao đẳng, đại học, sau đại học)
(In lần thứ tư có sửa chữa và bổ sung)

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 2009

LỜI GIỚI THIỆU

Trong những năm gần đây yêu cầu về giảng dạy và học tập môn toán cao cấp trong các trường Đại học kỹ thuật (Cao đẳng, Đại học và sau Đại học) ngày càng cấp bách về số lượng và chất lượng. Các sinh viên kỹ thuật cần nhiều giáo trình toán cao cấp theo hướng hiện đại về lý thuyết cũng như bài tập. Các thầy giáo cũng cần nhiều bộ giáo trình như thế để tham khảo, chuẩn bị bài giảng và chọn cho mình một chiến lược giảng dạy thích hợp. Trong lúc đó số lượng các giáo trình về toán cao cấp dành cho các trường kỹ thuật chỉ đếm được trên đầu ngón tay. Nhiều bộ giáo trình về toán cao cấp đã được xuất bản hiện nay chưa đạt trình độ cao, sâu sắc, đáp ứng được yêu cầu học toán và dạy toán cho các kỹ sư trong thời đại khoa học kỹ thuật và thông tin phát triển bùng nổ như hiện nay.

Giáo trình này của tác giả ra đời đáp ứng nhiều nhu cầu hết sức cấp bách hiện nay về mặt giáo trình toán cao cấp cho sinh viên các trường Đại học kỹ thuật (Cao đẳng, Đại học và sau Đại học). Về toàn cục nội dung của giáo trình này bao gồm các vấn đề cơ bản và quan trọng nhất của toán học cao cấp cần thiết cho một kỹ sư: đó là những cơ sở quan trọng của phép tính vi phân của hàm một biến và hàm nhiều biến, các định lý và phương pháp cơ bản của phép tính tích phân của hàm một biến và hàm nhiều biến, cơ sở của giải tích vecteur, hình học vi phân, lý thuyết cơ bản về phương trình vi phân, chuỗi hàm, chuỗi Fourier và tích phân Fourier. Các thông tin đề cập đến các vấn đề trên của tác giả là cơ bản, đảm bảo tính chính xác về nội dung toán học. Các chứng minh đưa ra đều ngắn gọn, chặt chẽ.

Đặc biệt phần đề cập đến lý thuyết về hàm nhiều biến là một vấn đề rất tinh tế trong giải tích toán học, vì ở đây nhiều tình huống xảy ra phức tạp hơn nhiều ở trong Topo nhiều chiều so với Topo một chiều. Do nắm vững các kiến thức cơ bản của giải tích toán học dựa trên kinh nghiệm giảng dạy toán học cho các trường Đại học kỹ thuật trong và ngoài nước trong nhiều năm qua, tác giả trình bày toàn bộ giáo trình và nói riêng nội dung của phần này rất đầy đủ và hiện đại (ví dụ phần đề cập đến cực trị của hàm nhiều biến, tác giả đã sử dụng nhuần nhuyễn các định lý về dạng toàn phương để chứng minh các điều kiện đủ của cực trị)

Giáo trình được viết một cách sáng sủa và chặt chẽ theo một dây chuyền tư duy logique, đó là hai yếu tố rất khó khi đề cập đến một vấn đề toán học. Thông thường để vấn đề đặt ra đảm bảo tính chặt chẽ và chính xác của toán học thì người đọc sẽ rất khó hiểu, hoặc phải có một khả năng tư duy tốt, nói cách khác là một thói quen tư duy toán học. Ở đây tác giả kết hợp được hai điều nói trên: vẫn không mất chính xác mà vẫn đảm bảo tính dễ hiểu cho sinh viên (ví dụ phần xây dựng hệ tiên đề về số thực, phần tích phân phụ thuộc tham số, tích phân suy rộng...).

Giáo trình này đã đề cập đến một số vấn đề khá hiện đại của toán học mà trước đây trong các giáo trình về toán cao cấp ít đề cập tới như khái niệm không gian métrique, hội tụ đều, chuỗi Fourier tổng quát,... Ngoài ra tác giả còn đưa vào những bổ sung rất cần thiết cho người kỹ sư như các phần: toán tử Laplace giải phương trình vi phân, các bài toán cơ bản của vật lý toán học (truyền nhiệt, truyền sóng, ...), phần phụ lục các công thức cơ bản nhất của toán học. Việc mạnh dạn đưa vào giáo trình các vấn đề như thế là một việc làm rất cần thiết để nâng cao chất lượng đào tạo người kỹ sư, vì ngày nay người kỹ sư cần toán học ở mức độ sâu sắc và hiện đại trong quá trình học tập để tiếp cận với công nghệ và tin học hiện đại.

Hà nội, ngày 30 tháng 4 năm 1997

GS. TSKH Lê Hùng Sơn

LỜI NÓI ĐẦU

Trong những năm vừa qua, khoa toán trường Đại học Bách khoa Hà Nội đã nghiên cứu đề tài: " Xây dựng nội dung chương trình toán cao cấp cho các ngành kỹ thuật trên cơ sở trung học, học sinh đã học toán theo chương trình mới (12 năm)" và đã đề ra được một chương trình toán cao cấp theo yêu cầu đó.

Qua giảng dạy môn giải tích ở Đại học kỹ thuật trong và ngoài nước trong nhiều năm qua, và dựa theo chương trình toán đã đề ra, tôi viết giáo trình này, nhằm mục đích giúp các sinh viên kỹ thuật có tài liệu tham khảo, góp phần nâng cao chất lượng đào tạo, để trình độ toán của người kỹ sư của ta được hoà nhập vào khu vực và quốc tế

Trong phần đầu của giáo trình, vì sinh viên đã được học một số nội dung ở trung học, nên mục đích là hệ thống hoá và nâng lên một mức độ tương đối hiện đại (Phương pháp tiên đề về số thực) nhằm giúp sinh viên có một tư duy logique chặt chẽ trong việc học tập toán và các ngành khác.

Trong phần sau của giáo trình, dựa trên cơ sở phần đầu đã trình bày, giáo trình cung cấp những kiến thức cơ bản của giải tích từ thấp đến cao phù hợp với yêu cầu của người kỹ sư trong hiện tại và tương lai.

Giáo trình này có thể dùng làm tài liệu tham khảo cho các sinh viên kỹ thuật ở cả ba đối tượng: cao đẳng, đại học, và sau đại học.

Giáo trình được chia thành hai tập:

Tập I: Phép tính vi phân và tích phân của hàm một biến (Giải tích I)

Tập II: Phép tính vi phân và tích phân của hàm nhiều biến. Phương trình vi phân và lý thuyết chuỗi (Giải tích II + III).

Các phần nâng cao và các bài tập khó đều đánh dấu *.

(tương ứng với ba học kỳ đầu của mỗi khoá học theo chương trình của bộ đã ban hành).

Tôi rất cảm ơn Hội đồng khoa học khoa Toán trường Đại học Bách khoa Hà Nội và các bạn đồng nghiệp trong khoa đã giúp đỡ và tạo điều kiện cho tôi viết giáo trình này, nhất là các đồng chí Trần Xuân Hiến, Đặng Khải, Lê Hùng Sơn, Dương Quốc Việt, Nguyễn Cảnh Lương đã đọc rất kỹ bản thảo và cho nhiều ý kiến quý báu.

Giáo trình này tuy xuất bản lần hai, vẫn không tránh khỏi thiếu sót mong bạn đọc cho nhiều ý kiến.

Tác giả

MỤC LỤC

Chương 13. LÝ THUYẾT VỀ CHUỖI

A - CHUỖI SỐ

B - CHUỖI HÀM

C - CHUỖI VÀ TÍCH PHÂN FOURIER

***Phụ chương*. CÁC CÔNG THỨC THÔNG DỤNG**

Chương 8

ÁP DỤNG PHÉP TÍNH VI PHÂN VÀO HÌNH HỌC

Trong hình học giải tích ta đã nghiên cứu các đường cong trong một hệ tọa độ nào đó. Ta thấy các đường cong có những tính chất hoàn toàn phụ thuộc vào hệ tọa độ đã chọn, chẳng hạn: độ dốc của tiếp tuyến, bề lồi, lõm. .. Tuy nhiên các đường cong còn có các tính chất chỉ phụ thuộc vào chính đường cong, gọi là các tính chất nội tại của chúng. Trong bài này sẽ nghiên cứu một số tính chất đó, vì phương tiện nghiên cứu là phép tính vi phân, nên môn học này gọi là hình học vi phân.

A- ĐƯỜNG CONG PHẲNG

§1. KHẢO SÁT SƠ BỘ

1.1. Phương trình của đường cong

Ta biết nếu cho đường cong C trong mặt phẳng thì phương trình của C hoặc có dạng

$y = f(x)$ hay $F(x,y) = 0$, $a \le x \le b$

gọi là phương trình Descartes của C

hoặc có dạng: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (\alpha \le t \le \beta)$

gọi là phương trình tham số của C

hoặc có dạng $r = f(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$

gọi là phương trình độc cực của C.

Cho đường cong C có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

Xét cung $\overset{\frown}{AM}$ của C, A ứng với tham số t_0, M ứng với tham số t.

Rõ ràng độ dài s của cung $\overset{\frown}{AM}$ phụ thuộc vào tham số t : $s = s(t)$.

Ngược lại t sẽ phụ thuộc s : $t = t(s)$

Do đó: $\begin{cases} x = x(t) = x[t(s)] \\ y = y(t) = y[t(s)] \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$

Đó cũng là phương trình tham số của đường cong, nhưng tham số là s. Như vậy, thay cho tham số bất kỳ t ta có thể dùng tham số đặc biệt s là độ dài cung $\overset{\frown}{AM}$ của đường cong, với A cố định, còn M là điểm chạy trên đường cong. Người ta gọi s là hoành độ cong và phương trình tham số s là phương trình tự hàm của đường cong.

Thí dụ: Ta biết phương trình tham số của đường tròn tâm O bán kính R là:

$$\begin{cases} x = R.\cos t \\ y = R.\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Với t là góc giữa trục Ox và bán kính OM (M (x,y)) mặt khác ta biết độ dài cung $\overset{\frown}{AM} = s$ ứng với góc ở tâm t là $s = Rt$ suy ra $t = \dfrac{s}{R}$. Thay lại phương trình tham số trên ta có phương trình tự hàm của đường tròn, đó là:

$$\begin{cases} x = R\cos\dfrac{s}{R} \\ y = R\sin\dfrac{s}{R} \end{cases} \qquad 0 \le s \le 2\pi R$$

1.2. Tiếp tuyến và pháp tuyến:

Ta biết nếu đường cong cho theo phương trình $y = f(x)$ thì phương trình của tiếp tuyến và của pháp tuyến với đường cong tại điểm (x_0, y_0) là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ và } y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Nếu đường cong cho theo phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$ thì vì $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ nên phương trình của tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong tại (x_0, y_0) ứng với t_0 sẽ là:

$$y - y_0 = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x_0) \text{ và } y - y_0 = \frac{-x'(t_0)}{y'(t_0)}.(x - x_0)$$

hay

$$\frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{x - x_0}{x'_0} \quad , \quad \frac{y - y_0}{x'_0} = -\frac{x - x_0}{y'_0}$$

Với $x'_0 = x'(t_0)$, $y'_0 = y'(t_0)$

Vì $\operatorname{tg}\alpha = y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ nên các cosin chỉ hướng của tiếp tuyến tại một điểm bất kỳ (x,y) của đường cong $y = f(x)$ sẽ là:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}}\ ; \quad \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{y'_x}{\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}}$$

và của đường cong cho theo phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{sẽ là :} \quad \cos\alpha = \frac{x'_t}{\sqrt{x'^2_t + y'^2_t}} \quad ; \quad \sin\alpha = \frac{y'_t}{\sqrt{x'^2_t + y'^2_t}}$$

1.3. Vi phân cung:

Xét đường cong C có phương trình $y = f(x)$, giả sử hàm $y = f(x)$ khả vi trong lân cận của điểm x.

Xét $M(x,y) \in C, y = f(x)$

$M'(x + \Delta x), (y + \Delta y) \in C$ (Hình 87)

Đặt $\overset{\frown}{MM'} = \Delta s$

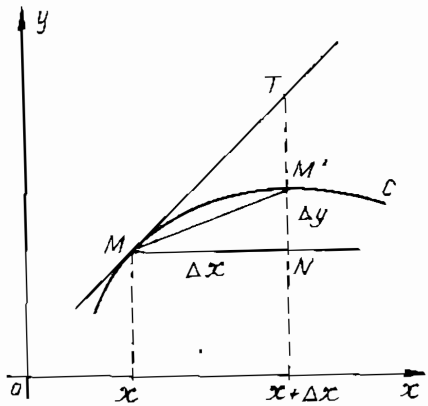
Ta có

$\overline{MM'} \le \overset{\frown}{MM'} = \Delta s \le \overline{MT} + \overline{TM'}$ (1)

Nhưng $\overline{MM'} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$,

$\overline{NT} = dy = y'.\Delta x$

$\overline{MT} = \sqrt{\Delta x^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2_x}\ \Delta x$



Hình 87

$\overline{TM'} = dy - \Delta y = 0(\Delta x)$ là một vô cùng bé bậc cao hơn Δx, thay vào (1) ta có:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.\Delta x \le \Delta s \le \sqrt{1+y'^2}\,\Delta x + 0(\Delta x)$$

Chia cho Δx (giả sử $\Delta x > 0$)

$$\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \le \frac{\Delta s}{\Delta x} \le \sqrt{1+y'^2} + \frac{0(\Delta x)}{\Delta x}$$

Cho $\Delta x \to 0$ ta có:

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + y'^2}$$

hay $ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ hay $ds^2 = dx^2 + dy^2$

Công thức này gọi là công thức vi phân cung của đường cong $y = f(x)$.

Nếu C cho theo phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

thì dễ dàng suy ra $ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt$

Nếu C cho theo phương trình độc cực $r = f(\varphi)$

thì cũng dễ dàng có: $ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$

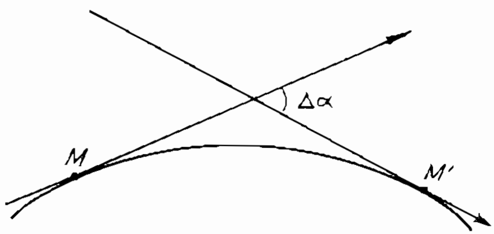
§2. ĐỘ CONG

2.1. Định nghĩa:

Xét một cung đường cong (Hình 88) giả sử tại mỗi điểm của nó chỉ có một tiếp tuyến. Ta thấy khi một điểm M chuyển rời trên đường cong thì tiếp tuyến tại M với đường cong sẽ quay một góc lớn hay nhỏ tùy theo "mức cong" của đường cong. Đặc biệt đối với đường thẳng thì góc quay đó luôn luôn bằng không vì tiếp tuyến với đường thẳng trùng với chính đường thẳng. Như vậy góc quay của tiếp tuyến đặc trưng cho "mức cong" của đường cong.

Bây giờ xét cung $\overset{\frown}{MM'}$ của đường cong, giả sử độ dài của $\overset{\frown}{MM'}$ là Δs và góc lệch của tiếp tuyến tại M, M' là $\Delta\alpha$ (tính theo đơn vị dài). Xét tỉ số $\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ tỉ số này đặc trưng cho "mức cong" của đường cong trên một đơn vị dài của cung đường cong. Người ta gọi tỉ số đó là độ cong trung bình của đường cong trên cung $\overset{\frown}{MM'}$.

Kí hiệu: $K_m = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$



Hình 88

Thí dụ: Đối với đường tròn bán kính R thì $\Delta s = R|\Delta\alpha|$ do đó độ cong trung bình của nó:

$$K_M = \left|\frac{\Delta\alpha}{R\Delta\alpha}\right| = \frac{1}{R}$$

Nghĩa là độ cong trung bình của đường tròn luôn luôn không đổi và bằng nghịch đảo của bán kính.

Đối với một đường cong bất thì nói chung độ cong trung bình sẽ thay đổi trên các đoạn cung khác nhau. Ta thấy nếu Δs càng nhỏ thì độ cong trung bình càng đặc trưng được gần "mức cong" của đường cong tại một điểm. Một cách lý tưởng người ta xem giới hạn:

$$\lim_{\Delta s\to 0} K_M = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| \qquad (\Delta s \to 0 : M' \to M)$$

là đặc trưng cho "mức cong" của đường cong tại điểm M, và gọi giới hạn đó là độ cong của đường cong tại điểm M.

Kí hiệu: $$K = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

Theo định nghĩa đạo hàm thì $K = \left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|$ (1)

nghĩa là: Độ cong tại điểm M của đường cong bằng trị số tuyệt đối của đạo hàm góc lệch của tiếp tuyến và trục Ox tại M đối với hoành độ cong s.

Thí dụ: Đối với đường tròn bán kính R thì:

$$K = \lim_{\Delta s\to 0} K_M = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{R} = \frac{1}{R}$$

nghĩa là độ cong của đường tròn tại mọi điểm cũng luôn luôn không đổi và cũng bằng nghịch đảo của bán kính (như độ cong trung bình của nó).

Chú ý rằng khái niệm độ cong trung bình và độ cong tại một điểm mà ta vừa đưa ra hoàn toàn tương tự như khái niệm tốc độ trung bình và tốc độ tức thời trong cơ học.

2.2. Công thức tính độ cong:

1°. Đường cong cho theo phương trình y = f(x)

Công thức (1) có thể viết $K = \left|\dfrac{d\alpha}{dx}\cdot\dfrac{dx}{ds}\right|$ (1')

Theo ý nghĩa hình học của đạo hàm tg $\alpha = y'$

Suy ra $\alpha = \text{arctg}y'$ và $\dfrac{d\alpha}{dx} = \dfrac{y''}{1+y'^2}$

Theo công thức vi phân cung:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,.dx$$

Thay $\frac{d\alpha}{dx}$, $\frac{dx}{ds}$ vừa tìm được vào (1') ta có:

$$K = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (a)$$

2^0. Đường cong cho theo phương trình tham số x = x(t), y = y(t)

Do các công thức liên hệ:

$$y'_x = \frac{y'}{x'}, \quad y''_{x^2} = \frac{x'\,y'' - x''\,y'}{x'^3} \quad \text{với } x' = x'(t),\ y' = y'(t)$$

và theo (a) ta có.

$$K = \frac{|x'\,y'' - x''\,y'|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} \qquad (b)$$

3^0. Đường cong cho theo phương trình độc cực r = f(φ)

Do các công thức liên hệ:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = f(\varphi).\cos\varphi \\ y = f(\varphi).\sin\varphi \end{cases}$$

nên có thể coi đường cong là cho theo tham số φ, tính đạo hàm của x, y theo φ rồi thay vào công thức (b).

ta có:

$$K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{\left(r^2 + r'^2\right)^{3/2}} \qquad (c)$$

Thí dụ:

1) Tìm độ cong của parabole $y = ax^2$ tại gốc 0.

Ta tính $y' = 2ax$, $y'' = 2a$ tại gốc 0, $x = 0$ thì $y' = 0$, $y'' = 2a$, thay vào công thức (a) ta có:

$$K = \frac{|2a|}{\left(1 + 0^2\right)^{3/2}} = |2a|$$

2) Tìm độ cong của đường ellipse: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Tại một điểm bất kỳ và tại đỉnh $(a,0)$. Ta tính:

$x' = -a\sin t$, $x'' = -a\cos t$, $y' = b\cos t$, $y'' = -b\sin t$

Thay vào công thức (b) ta có:

$$K = \frac{|-a\sin t(-b\sin t) - (-a\cos t)(b\cos t)|}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}$$

Tại đỉnh $(a, 0)$ ta có.

$$K = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2}$$

3) Tìm độ cong của đường cardioide $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(a > 0)$,

Tại điểm $(0, 2a)$. Ta tính $r' = -a\sin\varphi$, $r'' = -a\cos\varphi$

Tại $\varphi = 0$ thì $r' = 0$, $r'' = -a$, thay vào công thức (c) ta có:

$$K = \frac{|4a^2 + 2a^2|}{\left(4a^2\right)^{3/2}} = \frac{3}{4a}$$

§3. ĐƯỜNG TRÒN MẬT TIẾP - BÁN KÍNH CONG VÀ TÂM CONG.

3.1. Định nghĩa:

Khi nghiên cứu một điểm trên một đường cong để được tiện lợi trong nhiều trường hợp người ta thay cung - đường cong tại lân cận điểm nghiên cứu bằng một cung của đường tròn có độ cong bằng độ cong của đường cong tại điểm đó. Đường tròn này gọi là đường tròn mật tiếp với đường cong. Một cách chính xác ta định nghĩa: Ta gọi đường tròn mật tiếp hay đường tròn chính khúc với đường cong tại điểm M của đường cong là đường tròn:

Tiếp xúc với đường cong tại M.

Bề lõm của nó trùng với bề lõm của đường cong tại M.

Độ cong của nó bằng độ cong của đường cong tại M (Hình 48). Tâm của đường tròn mật tiếp gọi là tâm cong (tâm chính khúc) và bán kính của đường tròn mật tiếp gọi là bán kính cong (khúc bán kính) của đường cong tại M.

3.2. Công thức tính bán kính cong:

Ta biết với đường tròn thì tại mọi điểm của nó độ cong $K = \dfrac{1}{R}$ suy ra bán kính của đường tròn bằng nghịch đảo của độ cong $R = \dfrac{1}{K}$. Do đó theo các công thức tính độ cong (a), (b), (c) ở §2.2 ta suy ra các công thức tính bán kính cong của đường cong tại một điểm trong các trường hợp đường cong cho theo phương trình $y = f(x)$, tham số và độc cực:

$$R = \frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{|y''|} \quad , \quad R = \frac{\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}}{|x'y''-x''y'|} \quad , \quad R = \frac{\left(r^2+r'^2\right)^{3/2}}{|r^2+2r'^2-rr''|}$$

Thí dụ: Theo các thí dụ ở §2.2 thì:

Bán kính cong của Parabole $y = ax^2$ tại gốc 0 là:

$$R = \frac{1}{K} = \left|\frac{1}{2a}\right|$$

Bán kính cong của đường ellipse tại một điểm bất kỳ là

$$R = \frac{1}{K} = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab} \text{ và tại đỉnh } (a, 0) \text{ là } R = \frac{b^2}{a}$$

Bán kính cong của đường cardioide tại điểm $(0, 2a)$ là:

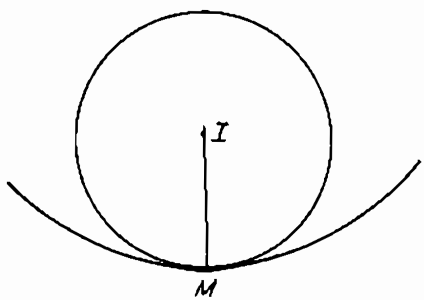
$$R = \frac{1}{K} = \frac{4a}{3}$$

3.3. Toạ độ của tâm cong:

Theo định nghĩa thì tâm cong của đường cong tại M phải nằm trên pháp tuyến với đường cong tại M về phía lõm của đường cong (Hình 89). Ta sẽ tìm các công thức xác định tọa độ của tâm cong:

Đầu tiên xét đường cong cho theo phương trình $y = f(x)$. Giả sử tâm cong của đường cong tại $M(x,y)$ là $I(x_0, y_0)$.

Theo định nghĩa $MI = R$ là bán kính cong tại M.



Hình 89

hay $$(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 = \frac{\left(1+y'^2\right)^3}{y''^2} \qquad (1)$$

Ta biết phương trình pháp tuyến tại M với đường cong là:

$$Y - y = \frac{-1}{y'}(X - x)$$

X, Y là toạ độ chạy trên đường pháp tuyến.

Vì I ở trên pháp tuyến nên

$$y_0 - y = \frac{-1}{y'}(x_0 - x)$$

hay $x_0 - x = -y'(y_0 - y)$ (2)

Giải hệ gồm (1) và (2) ta sẽ có toạ độ x_0, y_0 của tâm cong.

Cụ thể thay (2) vào (1) ta có:

$$y'^2(y_0 - y)^2 + (y_0 - y)^2 = \frac{\left(1+y'^2\right)^3}{y''^2}$$

hay:

$$(1 + y'^2)(y_0 - y)^2 = \frac{\left(1+y'^2\right)^3}{y''^2}$$

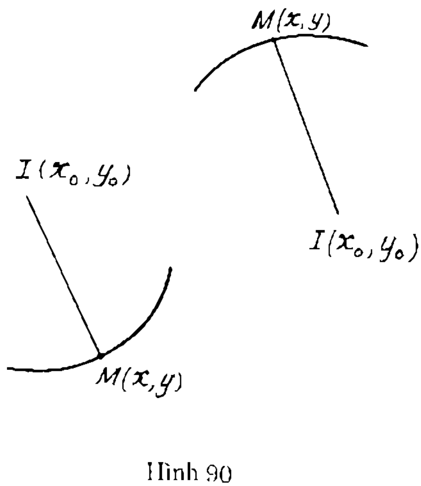
Suy ra: $$y_0 - y = \pm \frac{1+y'^2}{y''} \qquad (3)$$

Để chọn dấu + hay - ta xét như sau: (Hình 90)

Nếu $y'' > 0$ thì đường cong là lõm lúc đó $y_0 - y > 0$

Suy ra: vế phải của (3) phải dương nhưng $\frac{1+y'^2}{y''} > 0$ (do $y'' > 0$) nên ta phải chọn dấu +

Nếu $y''<0$ thì đường cong là lồi, lúc đó $y_0 - y < 0$, suy ra: vế phải của (3) phải âm, nhưng $\frac{1+y'^2}{y''} < 0$ (do $y''<0$).



Hình 90

nên ta vẫn phải chọn dấu +. Tóm lại, ta phải lấy:

$$y_0 - y = + \frac{1 + y'^2}{y''} \qquad (3')$$

Từ (3') suy ra: $y_0 = y + \dfrac{1 + y'^2}{y''}$

Mặt khác thay (3') vào (2) ta sẽ suy ra:

$$x_0 = x - \frac{\left(1 + y'^2\right)y'}{y''}$$

Vậy đối với đường cong $y = f(x)$ thì toạ độ của tâm cong x_0, y_0 ứng với điểm bất kỳ (x,y) của đường cong được xác định bởi:

$$x_0 = x - \frac{\left(1 + y'^2\right)y'}{y''} \qquad (a)$$

$$y_0 = y + \frac{1 + y'^2}{y''} \qquad (b)$$

Đối với đường cong cho theo tham số

$x = x(t)$

$y=y(t)$

thì theo các công thức liên hệ:

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$y''_{x^2} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'^3(t)}$$

và các công thức (a), (b) ta suy ra các công thức xác định tọa độ của tâm cong x_0, y_0 ứng với một điểm bất kỳ (x,y) của đường cong là:

$$x_0 = x - \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}.y' \qquad (c)$$

$$y_0 = y + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}.x' \qquad (d)$$

Biết tọa độ x_0, y_0 của tâm cong và bán kính cong R ta có phương trình của đường tròn mật tiếp là:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Thí dụ:

1) Tìm tọa độ tâm cong và viết phương trình của đường tròn mật tiếp với parabole $y = ax^2$ tại đỉnh (0,0) của nó. Ta tính $y' = 2ax$, $y'' = 2a$, tại đỉnh $x = 0$ thì $y' = 0$, $y'' = 2a$.

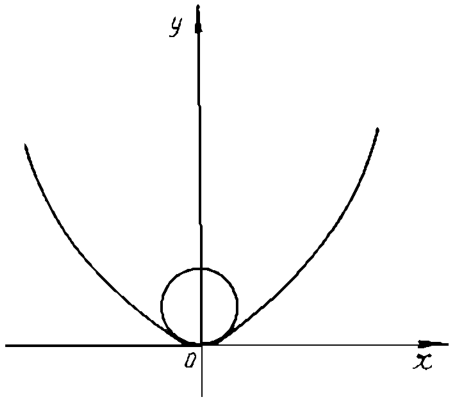
Thay vào các công thức (a), (b) ta có tọa độ của tâm cong là:

$$x_0 = 0,\ y_0 = \frac{1}{2a}$$

Ta biết bán kính cong của parabole tại đỉnh là

$$R = \frac{1}{|2a|}$$

Vậy phương trình của đường tròn mật tiếp với parabole tại đỉnh(hình 91) là:



Hình 91

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2a}\right)^2 = \frac{1}{4a^2}$$

2) Tìm tâm cong của ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ tại một điểm bất kỳ của nó và viết phương trình đường tròn mật tiếp tai đỉnh (a, 0) của nó (Hình 92), ta tính:

$$x' = -a\sin t, \qquad x'' = -a\cos t$$

$$y' = b\cos t, \qquad y'' = -b\sin t$$

Thay vào các công thức (c), (d) ta có toạ độ tâm cong của ellipse tại một điểm bất kỳ:

$$x_0 = a\cos t - \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}.b\cos t$$

$$y_0 = b\sin t + \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}.(-a\sin t)$$

hay rút gon có.

$$x_0 = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t$$

$$y_0 = \frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t$$

Đỉnh $(a, 0)$ ứng với $t = 0$, lúc đó:

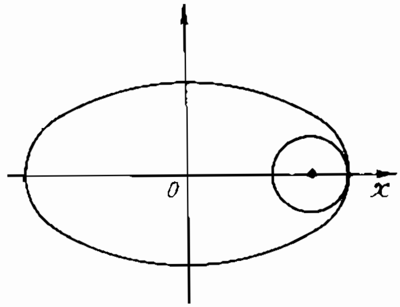
$$x_0 = \frac{a^2 - b^2}{a}, \qquad y_0 = 0$$

Ta lại biết bán kính cong của ellipse tại đỉnh $(a, 0)$ là

$R = b^2/a.$

Vậy phương trình của đường tròn mật tiếp tại đỉnh đó là

$$\left(x - \frac{a^2 - b^2}{a}\right)^2 + y^2 = \frac{b^4}{a^2}$$



Hình 92

§4. ĐƯỜNG TÚC BẾ VÀ ĐƯỜNG THÂN KHAI

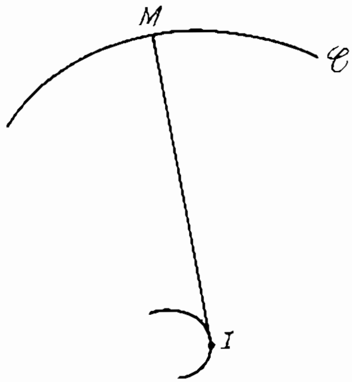
4.1. Định nghĩa:

Xét đường cong C, khi điểm M thay đổi trên C thì tâm cong I tương ứng với M sẽ thay đổi.

Quĩ tích L các tâm cong I của đường cong C gọi là đường túc bế của C, còn C thì gọi là đường thân khai của đường túc bế đó (Hình 93).

Để lập phương trình đường túc bế của C, đầu tiên xét C có phương trình $y = f(x)$.

Xét $(X, Y) \in L$ ứng với M $(x, y) \in C$ thì theo các công thức tọa độ của tâm cong ta có



Hình 93

$$X = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y'$$

$$Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

Ta thấy X, Y phụ thuộc x hoặc y (vì x, y phụ thuộc nhau: $y = f(x)$). Do đó và theo định nghĩa hệ (1) chính là phương trình tham số của đường túc bế L của C với tham số là x hoặc y.

Bây giờ xét C cho theo phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(X, Y) \in L$ ứng với điểm (x, y) bất kỳ của C. Ta được:

$$\begin{aligned} X &= x - \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} . y' \\ Y &= y + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} . x' \end{aligned} \qquad (2)$$

Ta thấy X, Y phụ thuộc t (vì x, y phụ thuộc t). Do đó và theo định nghĩa thì hệ phương trình (2) chính là phương trình tham số của đường túc bế L của C với tham số t.

Chú ý rằng nếu khử được tham số ở (1) hoặc (2) thì sẽ có phương trình liên hệ giữa X, Y của túc bế của C:

$$F(X, Y) = 0$$

Thí dụ:

1) Tìm túc bế của parabole $y^2 = 2px$

Ta tính y', y''. Đạo hàm 2 vế phương trình của parabole theo x ta có:

$2y.y' = 2p$, suy ra: $y' = \dfrac{p}{y}$, $y'' = \dfrac{-py'}{y^2} = \dfrac{-p^2}{y^3}$, mặt khác từ $y^2 = 2px$

Suy ra $x = \dfrac{y^2}{2p}$, thay x, y', y'' vừa tìm được vào hệ (1) ta có:

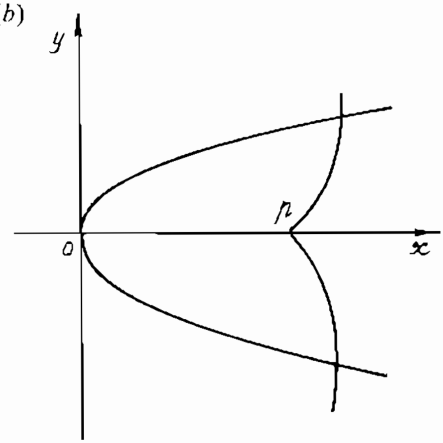
$$X = \frac{y^2}{2p} - \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{\frac{-p^2}{y^3}} . \frac{p}{y} = \frac{y^2}{2p} + \frac{y^2 + p^2}{y^2} \frac{y^3}{p^2} . \frac{p}{y} = \frac{3y^2}{2p} + p$$

$$Y = y + \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{\frac{-p^2}{y^3}} = y - \frac{y^2 + p^2}{y^2} \frac{y^3}{p^2} = -\frac{y^3}{p^2}$$

Do đó phương trình túc bế của parabole theo tham số y là:

$$X = \frac{3y^2}{2p} + p \qquad (a)$$

$$Y = -\frac{y^3}{p^2} \qquad (b)$$



Khử y bằng cách rút y^2 ở (a):

$$y^2 = \frac{2p}{3}(X - p) \qquad \text{(c)}$$

Bình phương (b) ta được:

$$Y^2 = \frac{y^6}{p^4} \qquad \text{(d)}$$

Thay y^2 ở (c) vào (d) ta được

$$Y^2 = \frac{8}{27p}(X - p)^3$$

Đó là đường parabole bán tam thừa cắt trục Ox tại $(p, 0)$ (Hình 94)

Hình 94

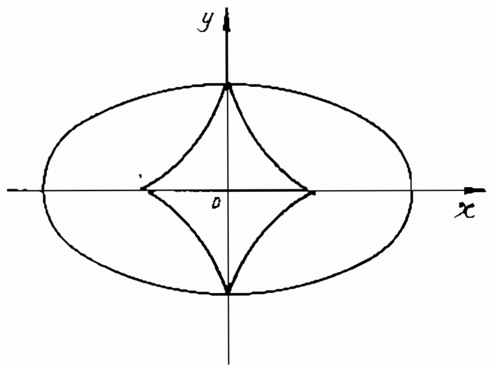
2) Tìm túc bế của ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$

Theo các công thức tính tọa độ của tâm cong của ellipse tại một điểm bất kỳ của nó ở thí dụ 2, §3.3 ta có ngay phương trình túc bế của ellipse theo tham số t là:

$$X = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t,$$

$$Y = \frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t$$

Đó là đường astroide (Hình 95)



Hình 95

4.2. Tính chất:

Ta sẽ đưa ra vài tính chất quan trọng của túc bế và thân khai, từ đó có thể tìm được đường thân khai khi cho trước túc bế của nó.

1° - Tiếp tuyến của đường túc bế là pháp tuyến của đường thân khai của nó (tại các điểm tương ứng).

Chứng minh: - Xét túc bế có phương trình:

$$X = x - \frac{1+y'^2}{y''}\,y',\ Y = y + \frac{1+y'^2}{y''} \qquad \text{với } y'' > 0$$

Theo các công thức xác định cosin chỉ hướng của tiếp tuyến ở §1 và bán kính cong R ở §3 thì:

$$\frac{1+y'^2}{y''}.y' = \frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{y''}.\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = R\sin\alpha$$

$$\frac{1+y'^2}{y''} = \frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{y''}.\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = R\cos\alpha$$

Do đó: $X = x - R\sin\alpha$

$Y = y + R\cos\alpha$

Suy ra: $dX = dx - R\cos\alpha d\alpha - dR.\sin\alpha$

$dY = dy - R\sin\alpha d\alpha + dR\cos\alpha$

Nhưng: $R\cos\alpha d\alpha = \frac{ds}{d\alpha}.\frac{dx}{ds}.d\alpha = dx$

$R\sin\alpha d\alpha = \frac{ds}{d\alpha}.\frac{dy}{ds}.d\alpha = dy$

(do $y'' > 0$), nên $R > 0$: $R = ds/d\alpha$, còn:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1+y'^2}dx} = \frac{dx}{ds}$$

$$\sin\alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y'dx}{\sqrt{1+y'^2}dx} = \frac{dy}{ds}$$

Vậy $dX = -dR.\sin\alpha$

$dY = dR.\cos\alpha$ (1)

Suy ra: $\frac{dY}{dX} = \frac{-d.R.\cos\alpha}{dR.\sin\alpha} = -\cot g\alpha = -\frac{1}{y'}$ hay $Y' = \frac{-1}{y'}$

Y' là hệ số góc của tiếp tuyến của túc bế, còn $-\frac{1}{y'}$ là hệ số góc pháp tuyến của thân khai. Vậy tiếp tuyến của túc bế là pháp tuyến của thân khai.

2^{0} - Nếu trên cung $\overset{\frown}{AM}$ của đường cong. bán kính cong R biến thiên đơn điệu thì hiệu giữa bán kính cong R tại M và độ dài cung trên túc bế ứng với cung $\overset{\frown}{AM}$ là một đại lượng không đổi.

Chứng minh: Gọi vi phân cung trên túc bế là $d\sigma$ thì

$d\sigma^2 = dX^2 + dY^2$, theo các công thức (1), dễ dàng suy ra:

$$d\sigma^2 = \sin^2 \alpha dR^2 + \cos^2\alpha dR^2 = dR^2$$

Hay $\qquad d\sigma = \pm\, dR$

Suy ra: $\qquad \dfrac{d\sigma}{ds} = \pm \dfrac{dR}{ds}$

Theo giả thiết trên cung $\overset{\frown}{AM}$, R biến thiên đơn điệu dR/ds chỉ luôn luôn dương hoặc âm

Do đó $\dfrac{d\sigma}{ds} = + \dfrac{dR}{ds}$

Hoặc: $\dfrac{d\sigma}{ds} = - \dfrac{dR}{ds}$

Suy ra $\dfrac{d\sigma}{dR} = 1$

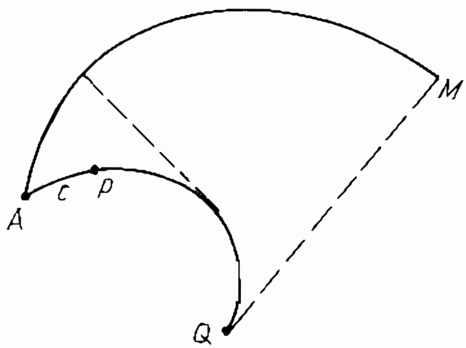
hoặc $\dfrac{d\sigma}{dR} = -1$

Nghĩa là tốc độ biến thiên của σ theo R luôn luôn bằng 1 hoặc -1.

Vậy $\dfrac{\Delta\sigma}{\Delta R} = \pm 1$

suy ra: $|\Delta\sigma| = |\Delta R|$ hay

$\sigma(M)$- $\sigma(A) = R(M)$ - $R(A)$.



Hình 96

Nhưng $\sigma(M)$ - $\sigma(A)$ là độ dài cung túc bế ứng với cung $\overset{\frown}{AM}$ còn $R(A) = c$ không đổi. Vậy $\sigma = R - c$ hay $R - \sigma = c$.

Đó là điều phải chứng minh.

Từ hai tính chất này suy ra cách dựng cơ học đường thân khai nếu cho túc bế của nó như sau:

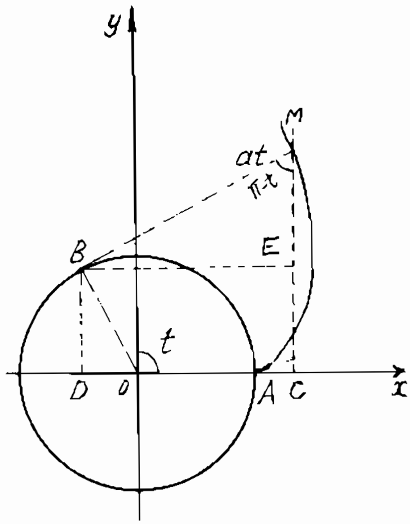
Đặt một sợi dây không dãn trên cung $\overset{\frown}{PQ}$ của đường túc bế buộc đầu Q còn đầu A hướng theo tiếp tuyến tại P với túc bế và cách xa P một đoạn AP=c

Nếu căng sợi dây (không trượt) theo cung $\overset{\frown}{PQ}$ của túc bế thì đầu A của sợi dây sẽ vẽ nên đường thân khai, ta thấy: cho một đường túc bế thì có thể dựng vô số đường thân khai tương ứng vì có thể lấy vô số giá trị của c (hình 96).

Thí dụ: Dựng đường thân khai của đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$, xét cung $\overset{\frown}{AB}$ trên đường tròn với $A(a,0)$ đặt một đoạn dây theo cung đó, buộc đầu B, căng đầu A (không trượt) khỏi cung thì A sẽ vẽ nên đường thân khai của đường tròn.

Ta có thể lập phương trình của thân khai này.

Gọi góc ở tâm của $\overset{\frown}{AB}$ là t và $M(x, y)$ là một điểm tùy ý trên thân khai vừa dựng thì theo hình: (Hình 97)



Hình 97

$x = \overline{DC} - \overline{DO} = BE - \overline{DO}$

$= at\sin(\pi - t) + a\cos t$

hay

$$x = a(t\sin t + \cos t)$$

Tương tự

$$y = a(\sin t - t\cos t)$$

Hệ này chính là phương trình tham số của đường thân khai của đường tròn trên

§5. HÌNH BAO CỦA MỘT HỌ ĐƯỜNG CONG

5.1. Điểm bất thường của đường cong

a) Định nghĩa: *Cho đường $C \subset R^2$ có phương trình:*

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

nếu (1) xác định y là hàm ẩn của x trong một khoảng (a, b) nào đó: y = y(x) thì như đã biết hệ số của tiếp tuyến của C tại M(x, y) ∈ C là:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \quad \text{với } F'_y \neq 0$$

hoặc

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{F'_y}{F'_x} \quad \text{với} \quad F'_x \neq 0$$

(nếu coi x là hàm ẩn của y: x = x(y)).

Như vậy khi ít nhất một trong các đạo hàm F'_x, F'_y khác không tại $M(x,y) \in C$: $F'^2_x + F'^2_y \neq 0$ thì đường cong có tiếp tuyến xác định tại M, M gọi là một điểm bình thường của C.

Nếu tại $M(x_0, y_0) \in C$: $F'_x(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) = 0$ thì $M(x_0, y_0)$ gọi là một điểm bất thường của C. Như vậy $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm bất thường của đường C nếu như toạ độ của nó thoả mãn hệ:

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_x(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Rõ ràng tại điểm bất thường của *C*, *C* có thể có tiếp tuyến hoặc không.

b) Phân loại: Giả thiết $M(x_0, y_0)$ là một điểm bất thường của đường *C*: $F(x, y) = 0$, và tồn tại các đạo hàm riêng cấp hai không đồng thời triệt tiêu:

$$A = F''_{x^2}(x_0, y_0), \quad B = F''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = F''_{y^2}(x_0, y_0)$$

Đặt $\Delta = AC - B^2$

1) Nếu $\Delta > 0$ thì *M* gọi là một điểm bất thường cô lập (H.98).

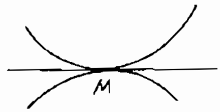
2) Nếu $\Delta < 0$ thì *M* gọi là một điểm kép hay một điểm nút (H.99)

3) Nếu $\Delta = 0$ thì *M* có thể là điểm bất thường cô lập hay điểm kép (H.100)

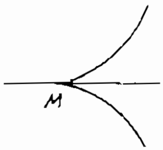
Nếu không rơi vào trường hợp này thì *M* gọi là một điểm lùi loại một (H.101) hay một điểm lùi loại hai (H.102)

Hình 98

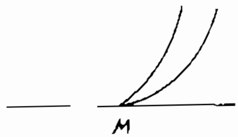
Hình 99



Hình 100



Hình 101



Hình 102

Trong không gian cho đường C có phương trình

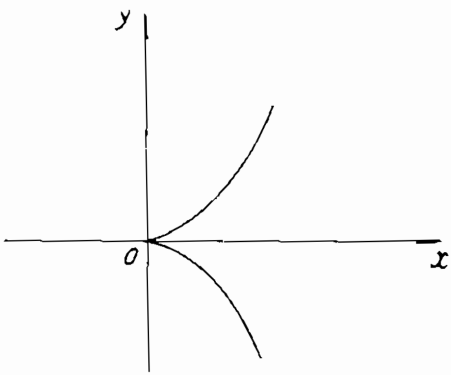
$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\quad \alpha \le t \le \beta.$$

Điểm $M(x, y, z) \in C$ gọi là điểm bất thường của C nếu tại M:

$$x'(t) = 0, \quad y'(t) = 0, \quad z'(t) = 0$$

Thí dụ:

1) Xét đường $y^2 - x^3 = 0$. Ta có $F'_x = -3x^2$, $F'_y = 2y$. Tại $(0,0)$ $F'_x = F'_y = 0$. Vậy điểm $(0, 0)$ là điểm bất thường của đường cong (điểm lùi) (H.103)



Hình 103

2. Xét đường cong C:

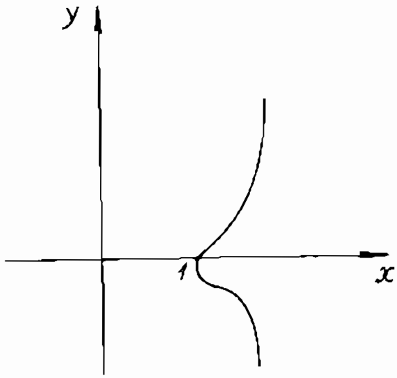
$$y^2 - x^2(x - 1) = 0$$

Ta có

$$F'_x = 2x - 3x^2, \quad F'_y = 2y$$

$$F'_x = 0, \quad F'_y = 0$$

khi $x = 0$, $y = 0$. $(0, 0) \in C$. Vậy điểm $(0, 0)$ là điểm bất thường của C (H 104) (điểm bất thường cô lập).



Hình 104

5.2. Hình bao của họ đường cong

a) Họ đường cong: Trong mặt phẳng, xét phương trình $F(x, y, c) = 0$ (1). Trong đó c là một tham số nào đó. Nếu ứng với $c = c_0$, (1) xác định y là hàm ẩn của x: $y = y(x)$ (hoặc $x = x(y)$) thì $F(x, y, c_0) = 0$ là phương trình của một đường cong nào đó. Tập hợp các đường cong ứng với các giá trị khác nhau của c gọi là một họ đường cong phụ thuộc một tham số c và (1) gọi là phương trình của họ.

Tương tự, phương trình $F(x, y, c_1, c_2) = 0$ gọi là phương trình của họ đường cong phụ thuộc hai tham số c_1, c_2...

Thí dụ:

1) Phương trình $(x - c)^2 + y = R^2$ $(R > 0)$ là phương trình của họ đường tròn tâm $(c, 0)$ bán kính R, phụ thuộc tham số c.

2) Phương trình

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{(5 - c)^2} = 1$$

là phương trình của họ ellipses đồng tâm O có tổng các bán trục không đổi (=5) phụ thuộc tham số c.

3) Phương trình $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ (R = cosnt) là phương trình của họ đường tròn, tâm là một điểm bất kỳ và có bán kính R, phụ thuộc vào 2 tham số a, b. Nếu xét R cũng là tham số thì phương trình đó là phương trình của họ đường tròn tâm bất kỳ và bán kính bất kỳ phụ thuộc 3 tham số.

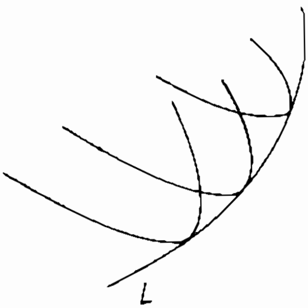
b) Hình bao của một họ đường cong

Định nghĩa: ***Cho một họ đường cong C phụ thuộc một tham số c có phương trình***

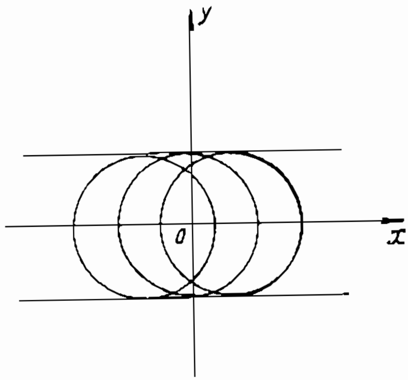
$$F(x, y, c) = 0 \qquad (1).$$

Nếu có một đường L tiếp xúc với mọi đường của họ C và ngược lại tại mọi điểm của L đều có một đường của họ C tiếp xúc với L thì L gọi là hình bao của họ C (H.105).

Thí dụ: Hình bao của họ đường tròn $(x-c)^2 + y^2 = R^2$ là 2 đường thẳng $y = \pm R$ (H.106).



Hình 105



Hình 106

Qui tắc tìm hình bao: nếu họ đường cong C: $F(x, y, c) = 0$ (1) có hình bao L, thì các điểm trên L có toạ độ thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Thực vậy, nếu họ C có hình bao L, và $M(x, y) \in L$ thì x, y phụ thuộc c: $x = x(c)$, $y = y(c)$. Do đó có thể xem phương trình tham số của L là: $x = x(c)$, $y = y(c)$ với $c \in (\alpha, \beta)$ nào đó. Khi đó $F[x(c), y(c), c] = 0$, $\forall c \in (\alpha, \beta)$.

Đạo hàm theo c, ta có:

$$F'_x x'(c) + F'_y . y'(c) + F'_c = 0 \quad (3)$$

Mặt khác xét $M(x , y) \in C$, thì các hệ số góc của tiếp tuyến tại M với C là

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \quad (F'_y \neq 0)$$

Theo định nghĩa, $M \in L$, hệ số góc của tiếp tuyến tại M với L là: $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(c)}{x'(c)}$ cũng theo định nghĩa $-\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{y'(c)}{x'(c)}$ hay $F'_x x'(c) + F'_y . y'(c) = 0$, thay vào (3) ta có: $F'_c = 0$. Vậy toạ độ của các điểm trên hình bao thoả mãn hệ (2). Nếu họ C có các điểm bất thường thì các điểm bất thường cũng có toạ độ thoả mãn hệ (2), vì theo định nghĩa: các điểm bất thường có toạ độ thoả mãn hệ:

$F'_x = 0$, $F'_y = 0$, thay vào (3) ta cũng có hệ (2). Do đó quy tắc trên chỉ là điều kiện cần để tìm hình bao.

Thí dụ:

1) Tìm hình bao của họ đường cong:

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{(5 - c)^2} = 1 \quad (1)$$

Đạo hàm theo c ta có:

$$-\frac{2x^2}{c^3}+\frac{2y^2}{(5-c)^3}=0 \quad \text{hay} \quad \frac{x^2}{c^2}=\frac{cy^2}{(5-c)^3} \qquad (2)$$

Khử c từ (1) và (2): từ (2)

$$\frac{x^2}{c^2}=\frac{cy^2}{(5-c)^3}$$

Thay vào (1) và giải y theo c ta có: $y=\sqrt{\frac{(5-c)^3}{5}}$ và từ (2) ta có: $x=\sqrt{\frac{c^3}{5}}$

Khử c ta có:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\frac{c}{5^{\frac{1}{3}}}+\frac{(5-c)}{5^{\frac{1}{3}}}=5^{\frac{2}{3}}.$$

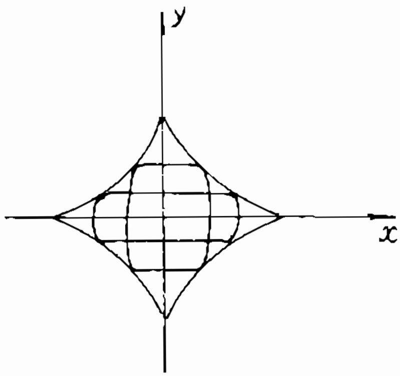
Đó là phương trình của đường astroide.

Mặt khác: $F'_x=\frac{2x}{c^2}=0$, $F'_y=\frac{2y}{(5-c)^2}=0$ khi $x=0$, $y=0$. Điểm (0, 0) không thuộc họ (1), Vậy họ ellipses (1) không có điểm bất thường và đường astroide là hình bao của họ ellipses đã cho (H 107).

2) Trong cơ học, ta biết phương trình chuyển động của viên đạn bắn lên với tốc độ ban đầu v_0 và góc bắn α (so với mặt đất) là:

$$x=v_0\cos\alpha.t$$

$$y=v_0\sin\alpha.t-\frac{gt^2}{2}$$



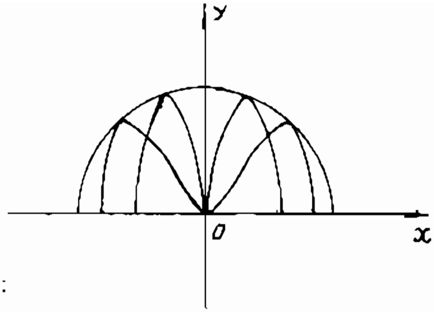
Hình 107

g là gia tốc trọng trường, khử t ta có phương trình quỹ đạo của viên đạn là:

$$y = x\,tg\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

Đặt $tg\,\alpha = c$, $\frac{g}{2v_0^2} = k =$ const thì:

$$y = cx - (1 + c^2)\,kx^2 \qquad (1)$$



Hình 108

Đó là họ paraboles phụ thuộc tham số c (H.108). Ta sẽ tìm hình bao của họ paraboles này.

Đạo hàm (1) theo c:

$$0 = x - 2ckx^2 = 0 \text{ hay } c = \frac{1}{2kx}$$

Thay vào (1) ta được:

$$y = \frac{1}{4k} - kx^2 = \frac{v_0}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2 \qquad (2)$$

Đây là phương trình của parabole đỉnh $(0, \frac{v_0^2}{2g})$ vì họ paraboles (1) không có điểm bất thường nên parabole (2) là hình bao của họ paraboles (1); (2) gọi là parabole an toàn.

3) Tìm hình bao của họ đường cong: $(y - a)^2 = (x - a)^3$.

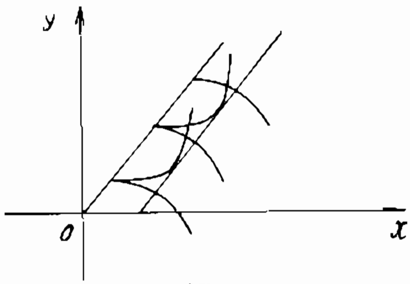
Ta có:

$$F'_a = -2(y - a) + 3(x - a)^2 = 0$$

$$\Rightarrow y - a = \frac{3}{2}(x - a)^2$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4}(x - a)^4 = (x - a)^3$$

$$\Rightarrow (x - a)^3[\frac{9}{4}(x - a) - 1] = 0.$$



Hình 109

Do đó:

$$x = \alpha \Rightarrow y = x$$

$$x = \frac{4}{9} + \alpha \rightarrow y = x - \frac{4}{27}$$

Ta được $\quad y = x - \frac{4}{27}$ là hình bao

$y = x$ là quĩ tích các điểm bất thường (H.109)

B- ĐƯỜNG TRONG KHÔNG GIAN

§1. SƠ LƯỢC VỀ GIẢI TÍCH VECTEUR

1.1. Hàm vecteur đối vô hướng

Ta đã định nghĩa hàm số $y = f(x)$ mà giá trị của đối số và hàm số là những con số thuần túy, người ta cũng gọi hàm số đó là hàm vô hướng với đối vô hướng.

Thực tiễn nhiều khi cần xét sự phụ thuộc giữa một đại lượng vô hướng và một đại lượng vecteur.

Thí dụ: Xét chuyển động của một điểm M kể từ một điểm gốc O nào đó, thì vị trí của M tại thời điểm t sẽ được hoàn toàn xác định bởi vecteur $\overrightarrow{OM}$. Như vậy $\overrightarrow{OM}$ phụ thuộc t, ta gọi $\overrightarrow{OM}$ là hàm vecteur của đối vô hướng t.

Tổng quát ta có:

Định nghĩa: Nếu ứng với mỗi giá trị của đại lượng vô hướng t, $\alpha \le t \le \beta$ ta có một vecteur xác định $\vec{V}$ thì $\vec{V}$ gọi là hàm vecteur đối vô hướng t.

Kí hiệu $\vec{V} = \vec{V}(t)$

Theo định nghĩa với các giá trị khác nhau của t ta có những vecteur $\vec{V}$ khác nhau, đó là các vecteur tự do, ta có thể đưa chúng về cùng gốc toạ độ O bằng cách đặt $\vec{V}(t) = \overrightarrow{OM}$, lúc đó $\vec{V}(t)$ gọi là hàm bán kính vecteur của điểm M và kí hiệu là:

$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}$. Như vậy việc nghiên cứu hàm vecteur bất kỳ đưa về được việc nghiên cứu hàm bán kính vecteur của điểm M, do đó để được tiện lợi từ đây về sau ta chỉ nghiên cứu hàm bán kính vecteur của điểm M, $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$. Nếu x, y, z là toạ độ của M thì

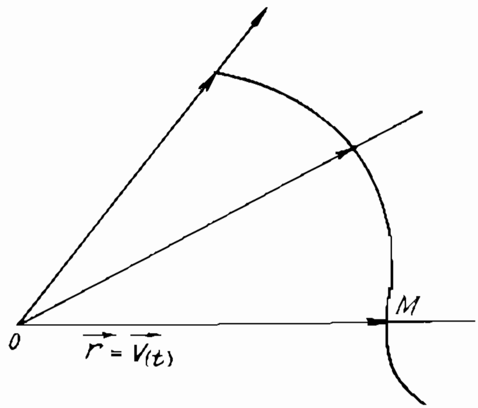
$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t) \quad (1)$$

và

$$\vec{r} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k} \quad (2)$$

khi t thay đổi, M sẽ thay đổi và vẽ một đường cong nào đó (Hình 110) đường cong này gọi là tốc đồ của hàm vecteur

$\vec{r} = \vec{r}\,(t)$.



Hình 110

Hệ (1) gọi là phương trình tham số với tham số t và đẳng thức (2) gọi là phương trình vecteur của đường cong đó.

Tương tự như hàm vô hướng, ta đưa ra định nghĩa giới hạn và liên tục của hàm vecteur như sau:

Ta gọi vecteur $\vec{a}$ là giới hạn của hàm vecteur $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ khi $t \to t_0$ nếu $\left|\vec{r} - \vec{a}\right|$ là một vô cùng bé khi $t \to t_0$

Ta gọi hàm $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ là liên tục tại $t = t_0$ nếu $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$

Nếu đặt $\Delta t = t - t_0$, $\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(t) - \vec{r}\,(t_0)$ thì $\vec{r}\,(t)$ là liên tục tại t_0 nếu $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{r} = 0$

1.2. Đạo hàm của hàm vecteur

1⁰. Định nghĩa: Cho hàm vecteur, $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, xét tại t, cho t số gia Δt thì $\vec{r}$ có vecteur gia $\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(t + \Delta t) - \vec{r}\,(t)$

Nếu $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ tồn tại thì giới hạn này gọi là đạo hàm của hàm vecteur $\vec{r}$ theo đối vô hướng t tại điểm t.

$$\vec{r}\,'(t) \quad \text{hay} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

2°. Ý nghĩa hình học:

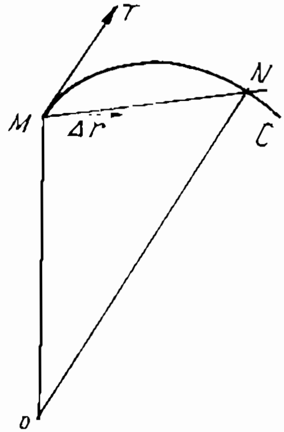
Giả sử tốc đồ của hàm $\vec{r} = \vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}$ là đường cong C và $\vec{r}(t + \Delta t) = \overrightarrow{ON}$ lúc đó:

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \overrightarrow{MN}$ (Hình 111)

Suy ra: Vecteur $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ là hướng theo cát tuyến MN khi $\Delta t \to 0$ thì cát tuyến MN có vị trí giới hạn là đường thẳng MT gọi là tiếp tuyến tại M với đường cong C, nghĩa là vecteur đạo hàm $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ hướng theo tiếp tuyến MT.

Vậy về hình học:

Vecteur đạo hàm của hàm vecteur có phương trùng với phương của tiếp tuyến với tốc đồ của hàm vecteur tại điểm tương ứng.



Hình 111

3°. Ý nghĩa cơ học:

Theo hình 64: $\left|\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \left|\dfrac{MN}{\overset{\frown}{MN}} \cdot \dfrac{\overset{\frown}{MN}}{\Delta t}\right|$

Ta thấy $\dfrac{\overset{\frown}{MN}}{\Delta t}$ chính là tốc độ trung bình của điểm M trong thời gian Δt, khi $\Delta t \to 0$ thì $\dfrac{\overset{\frown}{MN}}{\Delta t} \to V(t)$ là tốc độ của M tại thời điểm t, mặt khác khi $\Delta t \to 0$ thì $\dfrac{MN}{\overset{\frown}{MN}} \to 1$ (Khi t khá bé thì $\overset{\frown}{MN} \sim MN$).

Do đó:

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = V(t)$$

Vậy về cơ học: Độ dài của vecteur đạo hàm của bán kính vecteur $\vec{r}$ của điểm M tại thời điểm t bằng tốc độ của điểm M tại thời điểm t

4^o. Qui tắc tính đạo hàm:

Từ định nghĩa, tương tự như hàm vô hướng, ta có thể chứng minh các qui tắc tính đạo hàm của hàm vecteur đối vô hướng t:

I. $(\vec{a})' = 0$ $\vec{a}$ là vecteur không đổi cả về phương và độ dài.

II. $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}'_1 + \vec{r}'_2$

III. $(\alpha\vec{r})' = \alpha'\vec{r} + \alpha\vec{r}'$, $\alpha = \alpha(t)$

IV. $(\vec{r}_1 . \vec{r}_2)' = \vec{r}'_1 . \vec{r}_2 + \vec{r}_1 . \vec{r}'_2$

V. $(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)' = \vec{r}'_1 \wedge \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \wedge \vec{r}'_2$

VI. $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)' = (\vec{r}'_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) + (\vec{r}_1, \vec{r}'_2, \vec{r}_3) + (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}'_3)$

VII. Nếu $\vec{r} = \vec{r}(u)$ và $u = u(t)$ thì $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{du} . \dfrac{du}{dt}$

Chẳng hạn ta chứng minh: IV.

$$(\vec{r}_1\vec{r}_2)' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}_1(t+\Delta t)\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\vec{r}_1(t+\Delta t)\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t+\Delta t) + \vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)}{\Delta t}\right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left[\vec{r}_2(t+\Delta t).\frac{\vec{r}_1(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)}{\Delta t} + \vec{r}_1(t).\frac{\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_2(t)}{\Delta t}\right]$$

$$= \vec{r}'_1(t)\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t)\vec{r}'_2(t)$$

5^o. Đạo hàm của hàm vecteur cho theo tọa độ

Cho vecteur $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

Theo II và III ở 4^o - ta có:

$$\vec{r}'(t) = x(t)\vec{i}' + x'(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}' + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} + z(t)\vec{k}'$$

nhưng theo I: $\vec{i}' = \vec{j}' = \vec{k}' = 0$ vì là những vecteur không đổi.

Do đó: $\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$

Như vậy các thành phần của vecteur đạo hàm bằng đạo hàm các thành phần của hàm vecteur. Ta lại biết, vecteur đạo hàm hướng theo tiếp tuyến với tốc đồ của hàm vecteur do đó có thể lấy x', y', z' làm hệ số chỉ phương của tiếp tuyến đó.

6^o. Đạo hàm của vecteur có độ dài không đổi.

Cho vecteur:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \text{ với } |\vec{r}(t)| = c \text{ (không đổi)}$$

Về hình học: Tốc đồ của $\vec{r}$ là 1 đường cong vẽ trên mặt cầu bán kính r, xét

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = \vec{r}^{\,2} = |\vec{r}|^2 = r^2$$

Đạo hàm 2 vế ta có:

$$\vec{r}\,'\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot\vec{r}\,' = 0 \quad \text{hay } 2\,\vec{r}\cdot\vec{r}\,' = 0$$

Nghĩa là vecteur đạo hàm $\vec{r}\,'$ thẳng góc với hàm vecteur $\vec{r}$ điều này có thể suy từ ý nghĩa hình học.

Đặc biệt nếu $\vec{r}$ là vecteur đơn vị (có phương thay đổi) ta cũng có kết quả ấy.

7°. Đạo hàm của vecteur có phương không đổi.

Cho vecteur $\vec{r} = |\vec{r}(t)|\,\vec{r}_0$. $\vec{r}_0$ là vecteur không đổi thì $\vec{r}$ là vecteur có phương không đổi.

Đạo hàm ta có: $\vec{r}\,' = |\vec{r}|'\cdot\vec{r}_0 + |\vec{r}|\,\vec{r}_0$ nhưng $\vec{r}\,'_0 = 0$

Do đó: $\vec{r}\,' = |\vec{r}(t)|'\,\vec{r}_0$

Nghĩa là vecteur đạo hàm của hàm vecteur có phương không đổi cùng phương với phương của hàm vecteur đó.

8°. Đạo hàm cấp cao:

Cho $\quad \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

Ta biết $\quad \vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$

Đạo hàm của $\vec{r}\,'(t)$ gọi là đạo hàm cấp hai của $\vec{r}(t)$

Kí hiệu $\quad \vec{r}\,''(t) \quad$ hay $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)$

Theo trên thì $\vec{r}\,''(t) = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} + z''(t)\vec{k}$,

Về cơ học $\vec{r}\,''(t)$ hướng theo vecteur gia tốc của điểm M tương tự, ta có thể định nghĩa đạo hàm cấp ba, v.v...

§ 2. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN VÀ PHÁP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG

2.1. Phương trình:

Cho một đường cong C trong không gian, ta biết phương trình tham số của đường là:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \qquad \alpha \le t \le \beta \qquad (1)$$

và phương trình vecteur của đường là:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Nếu đường cho là giao tuyến của hai mặt

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0$$

thì hệ này gọi là phương trình không giải của đường.

Tương tự như đường cong phẳng, ta có công thức vi phân cung của đường trong không gian là:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}.dt$$

Xét cung $\overset{\frown}{AM}$ trên đường cong C. A ứng với tham số $t = t_0$ M ứng với tham số t. Đặt $\overset{\frown}{AM} = s$, rõ ràng khi t thay đổi thì M thay đổi, nghĩa là s thay đổi.

Vậy s là hàm số của t : $s = s(t)$.

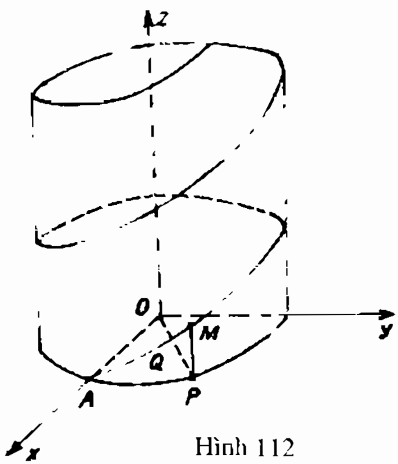
Ngược lại t sẽ là hàm số của s : $t = t(s)$, cho nên thay cho tham số t bất kỳ, ta có thể dùng tham số s là độ dài cung của đường tính từ một điểm gốc nào đó, gọi là hoành độ cong, lúc đó phương trình tham số của đường sẽ là:

$$x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s) \quad \alpha \le s \le \beta.$$

Hệ này cũng gọi là phương trình tự hàm của đường cong.

Thí dụ:

Lập phương trình quĩ đạo của một điểm M vừa quay đều xung quanh trục Oz với tốc độ góc không đổi ω và tĩnh tiến dọc theo trục đó với tốc độ khôn[g đổi] v_0 (Hình 112).



Hình 112

Ta thấy quĩ đạo của M là một đường nằm trên một mặt trụ trục oz và bán kính không đổi a nào đó.

Giả sử vị trí đầu tiên của M là điểm $A(a, 0, 0)$. Xét $M(x, y, z)$ tùy ý trên quĩ đạo, gọi P là hình chiếu của M trên mặt phẳng xoy và góc $(OX, \overrightarrow{OP}) = \varphi$ thì.

$$x = \overline{OP}\cos\varphi = a\cos\varphi$$
$$y = \overline{OP}\sin\varphi = a\sin\varphi$$
$$z = \overline{PM} = v_0 t$$

Theo giả thiết $\varphi = \omega t$, suy ra $t = \dfrac{\varphi}{\omega}$, lúc đó $z = \dfrac{v_0}{\omega}\varphi$ đặt $\dfrac{v_0}{\omega} = b$ thì $z = b\varphi$.

Vậy phương trình tham số (tham số φ) của quĩ đạo là.

$$x = a\cos\varphi\ ,\quad y = a\sin\varphi\ ,\quad z = b\varphi\ ,\quad b = \frac{v_0}{\omega}$$

Quĩ đạo gọi là đường đinh ốc trụ tròn xoay

2.2. Tiếp tuyến và pháp tuyến. Tam diện Frénet.

Cho đường cong C có phương trình tự hàm : $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ hay phương trình vecteur :

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$$

Xét điểm $M(x, y, z)$ trên C (Hình 113)

Ta biết vecteur $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ tại M hướng theo tiếp tuyến với C tại M.

Mặt khác: $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = \lim\limits_{\Delta s \to 0}\left|\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right| = \lim\limits_{\Delta s \to 0}\dfrac{\overline{MM_1}}{\overset{\frown}{MM_1}} = 1$

Do đó $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ là vecteur đơn vị

Kí hiệu $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ và gọi $\vec{\tau}$ là vecteur tiếp tuyến đơn vị với C tại M. Xét vecteur $\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}$, ta biết vecteur này thẳng góc với $\vec{\tau}$.

Kí hiệu vecteur đơn vị của nó là $\vec{\nu}$ thì:

$$\vec{\nu} = \frac{\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}}{\left|\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|}$$

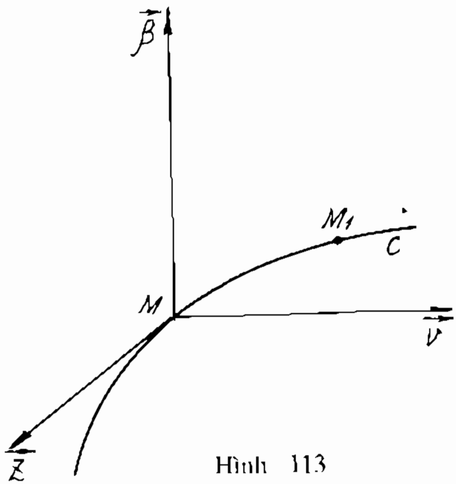
Người ta gọi $\vec{\nu}$ là vecteur pháp tuyến chính đơn vị và đường thẳng mang $\vec{\nu}$ là pháp tuyến chính với C tại M.

Bây giờ xét vecteur $\vec{\beta} = \vec{\tau} \wedge \vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ cũng là vecteur đơn vị thẳng góc với cả $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ người ta gọi $\vec{\beta}$ là vecteur trùng pháp tuyến đơn vị và đường thẳng mang $\vec{\beta}$ là trùng pháp tuyến với C tại M.

Mặt phẳng mang $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ gọi là mặt phẳng mật tiếp.

Mặt phẳng mang $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ gọi là mặt phẳng pháp và mặt phẳng mang $\vec{\beta}$, $\vec{\tau}$ gọi là mặt phẳng trực đạc với đường C tại M.

Các vecteur $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ và các mặt phẳng đó lập thành một tam diện gọi là tam diện Frénet của C tại M.



Hình 113

Trong thực tế đường cong C thường cho dưới dạng tham số t bất kì

$$x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ z = z(t)\ ,\ \alpha \le t \le \beta$$

Do đó ta sẽ xác định $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ theo tham số t bất kì.

Ta có:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \left(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}\right)\frac{dt}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,.dt}$$

hay:

$$\vec{\tau} = \frac{x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{\dfrac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|} \qquad (1)$$

Để tính $\vec{\beta}$ ta xét:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{r}}{ds}.\frac{ds}{dt} \wedge \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}.\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d\vec{r}}{ds}.\frac{ds}{dt} \wedge \left[\frac{d\vec{r}}{ds}.\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right]$$

$$= \vec{\tau}.\frac{ds}{dt} \wedge \left[\frac{d^2s}{dt^2}.\vec{\tau} + \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}.\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right] = \vec{\tau}.\frac{ds}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 =$$

(Tích có hướng đầu bằng không vì có 2 vecteur $\vec{\tau}$)

$$= \vec{\tau}.\frac{ds}{dt} \wedge \vec{\nu}\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \vec{\beta}\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|\left(\frac{ds}{dt}\right)^3$$

Suy ra:

$$\vec{\beta} = \frac{\dfrac{d\vec{r}}{dt} \wedge \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}}{\left|\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3} \qquad \text{nhưng } \left|\vec{\beta}\right| = 1$$

nên :

$$\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 = \left|\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$$

do đó:

$$\vec{\beta} = \frac{\dfrac{d\vec{r}}{dt} \wedge \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt} \wedge \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|} \qquad (2)$$

Tính được $\vec{\tau}, \vec{\beta}$ theo t, theo các công thức (1), (2) ta sẽ tính được $\vec{\nu}$ theo t, theo công thức:

$$\vec{\nu} = \vec{\beta} \wedge \vec{\tau} \qquad (3)$$

Từ (1) ta có thể lấy vecteur chỉ phương $\vec{T}$ của tiếp tuyến là:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{dt} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \qquad (1')$$

Do đó gọi X, Y, Z là tọa độ chạy trên tiếp tuyến thì phương trình của tiếp tuyến với đường cong tại điểm (x, y, z) là:

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'}$$

và phương trình của mặt phẳng pháp với đường cong tại điểm đó là:

$$(X - x)x' + (Y - y)y' + (Z - z)z' = 0$$

Từ (2) ta có thể lấy vecteur chỉ phương $\vec{B}$ của trùng pháp tuyến là:

$$\vec{B} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \qquad (2')$$

Có $\vec{T}$, $\vec{B}$ theo (3) ta có thể lấy vecteur chỉ phương $\vec{N}$ của pháp tuyến chính là.

$$\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T} \qquad (3')$$

Và tương tự ta có thể viết phương trình của trùng pháp tuyến, mặt phẳng mật tiếp, pháp tuyến chính và mặt phẳng trực đạc với đường cong.

Chú ý: Từ cách chọn các vecteur $\vec{T}$, $\vec{B}$, $\vec{N}$ như trên ta thấy:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} \quad , \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} \quad , \quad \vec{\nu} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$$

Do đó trong thực tiễn, để tính các vecteur $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ đối với đường cong cho theo tham số t bất kỳ, đầu tiên ta tính: $\vec{T}$, $\vec{B}$, $\vec{N}$

Thí dụ - Tìm các vecteur $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ và viết phương trình tiếp tuyến, mặt phẳng pháp, trùng pháp tuyến, mặt phẳng mật tiếp, pháp tuyến chính, mặt phẳng trực đạc với đường cong.

$$x = t \ , \ y = t^2 \ , \ z = t^3 \qquad \text{tại điểm ứng với } t = 1$$

Ta tính: $x' = 1$, $y' = 2t$, $z' = 3t^2$; $x'' = 0$, $y'' = 2$, $z'' = 6t$.

Tại $t = 1$ thì $x' = 1$, $y' = 2$, $z' = 3$; $x'' = 0$, $y'' = 2$, $z'' = 6$

Do đó theo (1) ta có: $\vec{T} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

Theo (2') ta có:

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

Theo (3') ta có

$$\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -22\vec{i} - 16\vec{j} + 18\vec{k}$$

Suy ra:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{14}}$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{19}}$$

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{-11\vec{i} - 8\vec{j} + 9\vec{k}}{\sqrt{266}}$$

điểm ứng với $t = 1$ là $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. Do đó, tại đó phương trình của tiếp tuyến là:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

của mặt phẳng pháp là: $(x - 1) + (y - 1).2 + (z - 1).3 = 0$

hay: $x + 2y + 3z - 6 = 0$

của trùng pháp tuyến là:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$$

của mặt phẳng mật tiếp là: $(x - 1)3 + (y - 1)(-3) + (z - 1).1 = 0$

hay: $3x - 3y + z - 1 = 0$

của pháp tuyến chính là:

$$\frac{x-1}{-11} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{9}$$

của mặt phẳng trực đạc là:

$$(x - 1)(-11) + (y - 1)(-8) + (z - 1)9 = 0$$

hay : $11x + 8y - 9z - 10 = 0$

§ 3. ĐỘ CONG VÀ ĐỘ XOẮN

3.1. Độ cong:

Tương tự như đường cong phẳng, ta sẽ định nghĩa độ cong của đường trong không gian.

Cho đường cong C ta vẽ các vecteur tiếp tuyến đơn vị $\vec{\tau}, \vec{\tau}_1$ với C tại M, M_1 và $\widehat{MM_1} = \Delta s$. Từ một điểm O nào đó ta dựng các vecteur $\overrightarrow{ON} = \vec{\tau}$; $\overrightarrow{ON_1} = \vec{\tau}_1$ (Hình I.14)

Gọi góc giữa $\vec{\tau}, \vec{\tau}_1$ là $\Delta\alpha$. Ta thấy khi M chạy trên đường cong C thì N sẽ chạy trên mặt cầu tâm O, bán kính $|\vec{\tau}| = 1$.

Ta gọi độ cong trung bình của C trên cung $\overset{\frown}{MM_1}$ là tỷ số $\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ kí hiệu

$$K_M = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

và độ cong của C tại điểm M là giới hạn

$$\lim_{\Delta s \to 0} K_M = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

($\Delta s \to 0$: $M_1 \to M$).

Kí hiệu:

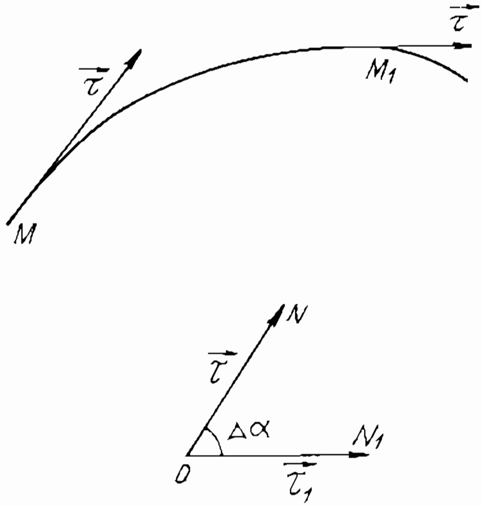
$$K = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

Đặt

$$|\vec{\tau} - \vec{\tau}_1| = |\Delta\vec{\tau}|$$

Ta có

$$\Delta\alpha = \overset{\frown}{NN_1} \sim NN_1 = |\Delta\vec{\tau}|$$



Hình 114

(vì $NN_1 = 2\sin\frac{\Delta\alpha}{2} \sim \Delta\alpha$ khi $\Delta\alpha \to 0$)

Do đó:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}\right|$$

Theo định nghĩa đạo hàm:

$$K = \left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}\right| \quad \text{hay } K = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \qquad (1)$$

Công thức (1) cho ta ngay công thức tính độ cong của đường cong theo phương trình tự hàm: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$.

Bây giờ để tính độ cong của đường cho theo tham số t bất kỳ, ta làm như sau:

Theo cách tính ở §2 ta có

$$\dot{\beta} = \frac{\dfrac{d\vec{r}}{dt} \wedge \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}}{\left|\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3} \qquad (2)$$

Vì $|\dot{\beta}| = 1$ nên $\quad 1 = \dfrac{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt} \wedge \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|}{\left|\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3}$

Vậy theo công thức (1) ta có:

$$K = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \frac{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt} \wedge \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3}$$

Với $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, $\quad \dfrac{d\vec{r}}{dt} \wedge \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$

Thí dụ: Tính độ cong của đường $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ tại điểm ứng với $t = 1$

Tại $t = 1$ ta có $\quad x' = 1, \quad y' = 2, \quad z' = 3$

$\quad x'' = 0, \quad y'' = 2, \quad z'' = 6$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}; \quad \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{76}$$

Vậy theo công thức (2) ta có:

$$K = \frac{\sqrt{76}}{(\sqrt{14})^3} = \frac{1}{14}\sqrt{\frac{38}{7}}$$

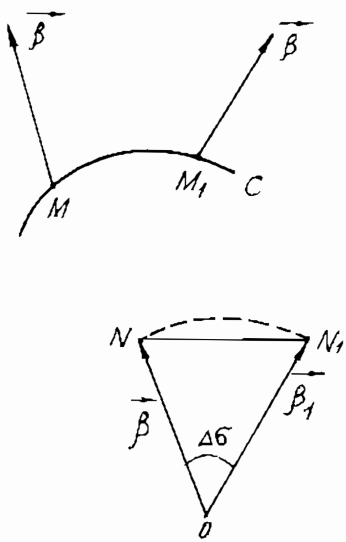
Chú ý: Nghịch đảo của độ cong của đường cong tại M cũng gọi là bán kính cong của đường cong tại M.

Kí hiệu $$R = \frac{1}{K}$$

3.2. Độ xoắn:

Cho đường cong C và xét các vecteur $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ tại M trên C. Ta biết mặt phẳng mật tiếp với đường cong tại M là mặt phẳng mang $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$. Đối với đường cong phẳng, tiếp tuyến $\vec{\tau}$ và pháp tuyến $\vec{\nu}$ luôn luôn nằm trong mặt phẳng chứa đường cong, nói cách khác mặt phẳng mật tiếp với đường cong luôn luôn chứa đường cong.

Đối với đường cong trong không gian thì khác, nói chung tại các điểm khác nhau của C, có những mặt phẳng mật tiếp khác nhau. Khi điểm M dời trên đường cong, mặt phẳng mật tiếp sẽ quay chung quanh tiếp tuyến $\vec{\tau}$ một góc lớn hay nhỏ tùy theo mức độ "gập ghềnh" của đường cong. Ta biết vecteur trùng pháp tuyến $\vec{\beta}$ thẳng góc với mặt phẳng mật tiếp, nên góc quay của mặt phẳng mật tiếp cũng là góc quay của vecteur $\vec{\beta}$. Như vậy góc quay của $\vec{\beta}$ chung quanh tiếp tuyến $\vec{\tau}$ biểu thị được mức độ "gập ghềnh" của đường cong.



Hình 115

Bây giờ xét các vectơ $\vec{\beta}$, $\vec{\beta}_1$ tại các điểm M, M_1 trên C. Từ một điểm O bất kỳ ta dựng các vecteur $\overrightarrow{ON} = \vec{\beta}$ $\overrightarrow{ON_1} = \vec{\beta}_1$. Ta thấy khi M dời trên C thì N sẽ dời trên mặt cầu tâm O, bán kính $|ON_1| = |\vec{\beta}_1| = 1$ đặt $\overset{\frown}{MM_1} = \Delta s$.

$\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{ON_1} = \vec{\beta} - \vec{\beta}_1$, góc giữa $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{ON_1}$ cũng là góc giữa $\vec{\beta}$, $\vec{\beta}_1$ là $\Delta\sigma$ (Hình 115).

Ta thấy tỉ số $\left|\dfrac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right|$ biểu thị góc quay của $\vec{\beta}$ trên một đơn vị dài của cung $\widehat{MM_1}$.

Người ta gọi tỉ số đó là độ xoắn trung bình của đường cong trên cung $\widehat{MM_1}$, còn giới hạn $\lim\limits_{\Delta s \to 0}\left|\dfrac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right|$ thì gọi là độ xoắn của đường cong tại M.

Kí hiệu $$T = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right|$$

Nhưng $$\Delta\sigma = \widehat{NN_1} \sim NN_1 = \left|\vec{\beta} - \vec{\beta}_1\right| = \left|\Delta\vec{\beta}\right|$$

$$\left(\text{Vì } NN_1 = 2\sin\frac{\Delta\sigma}{2} \sim \Delta\sigma \text{ khi } \Delta\sigma \to 0\right)$$

Do đó:

$$T = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\beta}}{\Delta s}\right|$$

Theo định nghĩa đạo hàm thì $$T = \left|\frac{d\vec{\beta}}{ds}\right| \qquad (1)$$

Theo công thức (1) muốn tính độ xoắn T tại 1 điểm M, ta phải tính vecteur $\vec{\beta}$ tại M.

Có thể chứng minh:

$$T = R^2\left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right)$$

với đường cong cho theo phương trình tự hàm: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$

$$T = \frac{\left(\dfrac{d\vec{r}}{dt}, \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \dfrac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)}{\left(\dfrac{d\vec{r}}{dt} \wedge \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2}$$

với đường cong cho theo phương trình tham số t bất kỳ

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

* Thực vậy, ta biết $$\frac{d\vec{\beta}}{ds} \perp \vec{\beta}$$

mặt khác $$\frac{d\vec\beta}{ds} = \frac{d}{ds}(\vec\tau \wedge \vec\nu) = \frac{d\vec\tau}{ds} \wedge \vec\nu + \vec\tau \wedge \frac{d\vec\nu}{ds}$$

nhưng $$\frac{d\vec\tau}{ds} = \frac{d^2\vec r}{ds^2} \,/\!/\, \vec\nu \quad \text{nên} \quad \frac{d\vec\tau}{ds} \wedge \vec\nu = 0$$

Do đó $$\frac{d\vec\beta}{ds} = \vec\tau \wedge \frac{d\vec\nu}{ds} \quad \text{nghĩa là} \quad \frac{d\vec\beta}{ds} \perp \vec\tau$$

Như vậy $\frac{d\vec\beta}{ds}$ thẳng góc cả với $\vec\tau$, $\vec\beta$ nên $\frac{d\vec\beta}{ds}$ có phương của $\vec\nu$, nghĩa là:

$$\frac{d\vec\beta}{ds} = \pm\left|\frac{d\vec\beta}{ds}\right|.\vec\nu$$

Theo (1) ta có $$\frac{d\vec\beta}{ds} = \pm T\,\vec\nu$$

Để tiện lợi về sau ta chọn dấu -, lúc đó $\frac{d\vec\beta}{ds} = -T\,\vec\nu$

Nhân vô hướng 2 vế đẳng thức này với $\vec\nu$ và chuyển vế ta có:

$$T = -\vec\nu\,\frac{d\vec\beta}{ds} \tag{2}$$

Ta biết :

$$\vec\nu = \frac{\dfrac{d^2\vec r}{ds^2}}{\left|\dfrac{d^2\vec r}{ds^2}\right|} \quad \text{và} \quad \frac{1}{R} = \left|\frac{d^2\vec r}{ds^2}\right| \quad \text{suy ra} \quad \vec\nu = R\frac{d^2\vec r}{ds^2} \tag{3}$$

Mặt khác theo trên:

$$\frac{d\vec\beta}{ds} = \vec\tau \wedge \frac{d\vec\nu}{ds} \quad \text{hay} \quad \frac{d\vec\beta}{ds} = \frac{d\vec r}{ds} \wedge \frac{d\vec\nu}{ds}$$

Theo (3) thì:

$$\frac{d\vec\beta}{ds} = \frac{d\vec r}{ds} \wedge \frac{d}{ds}\left(R\frac{d^2\vec r}{ds^2}\right)$$

hay:

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \left(\frac{dR}{ds} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} + R \cdot \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right) = \frac{dR}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right) + R\left(\frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right) \quad (4)$$

Theo (3) và (4) thì (2) viết được:

$$T = -R\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\left[\frac{dR}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right) + R\left(\frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right) \right]$$

$$= -R\frac{dR}{ds}\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right) - R^2\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right)$$

Tích hỗn hợp đầu bằng 0 vì có 2 vecteur trùng nhau, còn tích sau đổi dấu khi hoán vị 2 số hạng liền nhau

Do đó:

$$T = R^2\left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right)$$

Với $$R = \frac{1}{K} = \frac{1}{\left| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right|}$$

Bây giờ ta chuyển công thức (a) về trường hợp đường cong cho theo tham số t bất kỳ : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$

Ta có:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}s'$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}s'^2 + \frac{d\vec{r}}{ds}s''$$

$$\frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}s'^3 + 3\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}s's'' + \frac{d\vec{r}}{ds}s'''$$

Suy ra

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right) = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right)s'^6$$

Do đó:

$$T = R^2\left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right) = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right)}{\left(\frac{ds}{dt} \right)^6} \cdot R^2$$

Ta biết :

$$R^2 = \frac{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^6}{\left(\dfrac{d\vec{r}}{dt} \wedge \dfrac{d^2\vec{r}}{dt}\right)^2} \quad \text{nên} \quad T = \frac{\left(\dfrac{d\vec{r}}{dt}, \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \dfrac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)}{\left(\dfrac{d\vec{r}}{dt} \wedge \dfrac{d^2\vec{r}}{dt}\right)^2} \qquad \text{(b)}$$

Nghịch đảo của độ xoắn của đường cong tại một điểm gọi là bán kính xoắn của nó tại điểm ấy.

Kí hiệu: $\rho = \dfrac{1}{T}$

Thí dụ:

1) Tính độ xoắn của đường $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ tại $t = 1$

Tại $t = 1$ thì $x' = 1$ $y' = 2$ $z' = 3$

$x'' = 0$ $y'' = 2$ $z'' = 6$

$x''' = 0$ $y''' = 0$ $z''' = 6$

Suy ra:

$$\left(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}'''\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12$$

Còn $\left|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\right|^2 = 76$ (xem thí dụ ở 3.1)

Do đó theo (b) :

$$T = \frac{12}{76} = \frac{3}{19}$$

2) Tính độ cong và độ xoắn của đường đinh ốc

$x = a\cos\varphi$ $y = a\sin\varphi$ $z = b\varphi$

Ta có:

$$\vec{r} = a\cos\varphi\,\vec{i} + a\sin\varphi\,\vec{j} + b\varphi\,\vec{k}$$

$$\vec{r}\,' = -a\sin\varphi\,\vec{i} + a\cos\varphi\,\vec{j} + b\,\vec{k}$$

$$\vec{r}\,'' = -a\cos\varphi\,\vec{i} - a\sin\varphi\,\vec{j}$$

$$\vec{r}\,''' = a\sin\varphi\,\vec{i} - a\cos\varphi\,\vec{j}$$

$$\vec{r}'\wedge\vec{r}''=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -a\sin\varphi & +a\cos\varphi & b\\ a\cos\varphi & -a\sin\varphi & 0\end{vmatrix}=ab\sin\varphi\,\vec{i}-ab\cos\varphi\,\vec{j}+a^2\vec{k}$$

$$\left(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}'''\right)=\begin{vmatrix}-a\sin\varphi & a\cos\varphi & b\\ -a\cos\varphi & -a\sin\varphi & 0\\ a\sin\varphi & -a\cos\varphi & 0\end{vmatrix}=a^2b$$

Theo các công thức tính độ cong và độ xoắn ở trên ta có:

$$K=\frac{1}{R}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}}=\frac{a}{a^2+b^2}$$

$$T=\frac{1}{\rho}=\frac{a^2b}{a^2(a^2+b^2)}=\frac{b}{a^2+b^2}$$

Từ các kết quả này, ta suy ra một tính chất rất quan trọng của đường đinh ốc:

Tại mọi điểm của đường đinh ốc, độ cong và độ xoắn của nó là những đại lượng không đổi

Người ta cũng dùng tính chất này để định nghĩa đường đinh ốc.

Chú ý:

Từ các công thức tính $\vec{\tau}$, $\vec{v}$, $\vec{\beta}$, R, ρ ta suy ra các công thức liên hệ giữa chúng là:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\frac{\vec{v}}{R}\qquad\frac{d\vec{v}}{ds}=\frac{-\vec{\tau}}{R}+\frac{\vec{\beta}}{\rho}\qquad\frac{d\vec{\beta}}{ds}=\frac{-\vec{v}}{\rho}$$

Các công thức này gọi là các công thức Frénet của đường cong tại 1 điểm của nó

C- MẶT, TIẾP DIỆN VÀ PHÁP TUYẾN VỚI MỘT MẶT

Tập hợp S các điểm $M(x, y, z) \in R^3$ thoả mãn phương trình $F(x, y, z) = 0$ (1) gọi là một mặt và (1) gọi là phương trình của nó. Nếu từ (1) ta giải được $z = f(x, y)$ hoặc $y = f(x, z)$ hoặc $x = f(y, z)$ thì các phương trình này gọi là giải được (hay là dạng hiển) của S và (1) cũng gọi là phương trình không giải của S. Một mặt S có thể cho theo các phương trình:

$x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ (2), $(u, v) \in D \subset$ mặt phẳng u, v gọi là phương trình tham số của S. Rõ ràng từ (2) khử u, v ta có (1) và ngược lại. Mặt S gọi là một mặt liên tục nếu hàm F ở (1) liên tục trên S hoặc các hàm ở (2) liên tục trên D.

§1. MẶT CHO THEO PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG GIẢI

Trong R^3 cho mặt S có phương trình $F(x, y, z) = 0$ (1).

Định nghĩa 1: ***Một đường thẳng gọi là tiếp tuyến với mặt S tại M(x, y, z) ∈ S, nếu nó là tiếp tuyến với một đường cong bất kỳ trên S và qua M.***

Vì nói chung có vô số đường cong trên S qua $M \in S$, nên theo định nghĩa: Tại $M \in S$, có thể có vô số tiếp tuyến với S, các tiếp tuyến này liên hệ với nhau bởi:

Định lý: ***Nếu tại điểm M(x, y, z) ∈ S, tồn tại các đạo hàm riêng*** F'_x, F'_y, F'_z ***liên tục và*** $F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z \neq 0$ ***(ít nhất một trong chúng khác không) thì mọi tiếp tuyến tại M với S đều vuông góc với vecteur:***

$$\vec{N} = F'_x\vec{i} + F'_y\vec{j} + F'_z\vec{k}$$

Chứng minh: Xét một đường cong bất kỳ $C \subset S$ qua $M(x, y, z) \in S$, giả sử C có phương trình tham số: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Ta biết tiếp tuyến tại M với C có vecteur chỉ phương là: $\vec{T} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$ mặt khác vì
$C \subset S$ nên theo (1):

$$F[x(t), y(t), z(t)] \equiv 0 \qquad \forall t \in (\alpha, \beta).$$

Do đó và theo giả thiết:

$$F'_x x'(t) + F'_y y'(t) + F'_z z'(t) = 0$$

hay theo trên: $\vec{N}\vec{T} = 0$ nghĩa là $\vec{T} \perp \vec{N}$ vì $\vec{N}$ không phụ thuộc vào C qua M, nên mọi tiếp tuyến tại M với S đều thẳng góc với $\vec{N}$.

Theo định lý thì mọi tiếp tuyến tại M với S đều nằm trong một mặt phẳng vuông góc với vecteur $\overrightarrow{N}$.

Định nghĩa 2: ***Mặt phẳng chứa mọi tiếp tuyến với S tại M ⊂ S gọi là mặt phẳng tiếp xúc với S hay tiếp diện của S tại M. Đường thẳng qua M và vuông góc với tiếp diện của S tại M gọi là pháp tuyến với S tại M.***

Theo định nghĩa thì pháp tuyến với S tại M song song với $\overrightarrow{N}$ nghĩa là $\overrightarrow{N}$ là vecteur chỉ phương của pháp tuyến đó, $\overrightarrow{N}$ gọi là vecteur pháp của S tại M.

Từ định nghĩa ta có phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với S tại $M(x, y, z) \in S$ là:

$$(X - x)F'_x + (Y - y)F'_y + (Z - z)F'_z = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{X - x}{F'_x} = \frac{Y - y}{F'_y} = \frac{Z - z}{F'_z} \qquad (2)$$

trong đó X, Y, Z là toạ độ của một điểm bất kỳ trên tiếp diện và pháp tuyến. Đặc biệt, nếu mặt S cho theo phương trình: $z = f(x, y)$ thì $F = z - f(x, y)$ và các phương trình (1), (2) có dạng:

$$(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y = Z - z$$

$$\frac{X - x}{f'_x} = \frac{Y - y}{f'_y} = \frac{Z - z}{-1}$$

Thí dụ:

1) Viết phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với mặt ellipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

tại $M(x, y, z)$ trên mặt. Ta có:

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

do đó

$$F'_x = \frac{2x}{a^2},\ F'_y = \frac{2y}{b^2},\ F'_z = \frac{2z}{c^2}$$

Theo (1) và (2) ta có các phương trình phải tìm là:

$$\frac{x}{a^2}(X - x) + \frac{y}{b^2}(Y - y) + \frac{z}{c^2}(Z - z) = 0$$

$$\frac{X - x}{\dfrac{x}{a^2}} = \frac{Y - y}{\dfrac{y}{b^2}} = \frac{Z - z}{\dfrac{z}{c^2}}$$

phương trình đầu có thể viết:

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1$$

$$\left(\text{vì } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ do } M \text{ trên mặt}\right)$$

2) Viết phương trình của tiếp diện P với mặt $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$. Biết rằng nó song song với mặt phẳng Q: $x - y + 2z = 0$.

Theo thí dụ 1) thì phương trình của tiếp diện P tại $M(x, y, z)$ trên mặt là:

$$\frac{xX}{1} + \frac{yY}{\dfrac{1}{2}} + \frac{zZ}{1} = 1$$

theo giả thiết P // Q, nên:

$$\frac{x}{1} = \frac{2y}{-1} = \frac{z}{2}$$

Đặt các tỷ số bằng t thì $x = t$, $y = -\frac{t}{2}$, $z = 2t$. Thay vào phương trình của mặt:

$$t^2 + 2\left(-\frac{t}{2}\right)^2 + (2t)^2 = 1 \Rightarrow \frac{11t^2}{2} = 1 \Rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{2}{11}}$$

do đó:

$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{11}}, \quad y = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}, \quad z = \pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}$$

và ta được hai tiếp diện của mặt là: $x - y + 2z = \pm\sqrt{\frac{11}{2}}$

§2. MẶT CHO THEO PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ

Mặt $S \in R^3$ có thể cho theo phương trình tham số:

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)\ (1)\ (u, v) \in D \in R^2$$

Xét $M(x, y, z) \subset S$ và cho v = const, thì hệ (1) là phương trình tham số (với tham số u) của một đường cong $C_1 \subset S$, tiếp tuyến tại $M(x, y, z) \in C_1$ có phương trình:

$$\frac{X - x}{x'_u} = \frac{Y - y}{y'_u} = \frac{Z - z}{z'_u} \qquad (2)$$

Tương tự: cho u = const thì phương trình của tiếp tuyến tại $M(x, y, z) \subset C_2 \subset S$ là:

$$\frac{X - x}{x'_v} = \frac{Y - y}{y'_v} = \frac{Z - z}{z'_v} \qquad (3)$$

Các tiếp tuyến (2) và (3) nằm trên tiep diện của S tại M. Do đó phương trình tiếp diện của S tại M là:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

và vecteur pháp $\overrightarrow{N}$ với S tại M có các tọa độ:

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$$

với điều kiện là các đạo hàm riêng tồn tại liên tục và ít nhất một trong A, B, C khác không

Thí dụ: *Cho mặt $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = cv$ thì theo (4) phương trình của tiếp diện của S tại $M(x, y, z)$ bất kỳ trên mặt là:*

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & c \end{vmatrix} = 0$$

hay $\sin v.X - \cos v Y + \dfrac{u}{c} Z = uv$

Chú ý: 1) Trong R^3 đường cong C có thể cho theo hệ phương trình

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 & (S_1) \\ G(x, y, z) = 0 & (S_2) \end{cases}$$

nghĩa là C là giao của 2 mặt S_1, S_2. Tiếp tuyến với C tại $M \in C$, chính là giao tuyến của các tiếp diện của S_1, S_2 tại $M \in S_1 \times S_2 = C$.

Do đó phương trình của tiếp tuyến với C tại $M(x, y, z) \in C$ là:

$$\begin{cases} (X - x)F'_x + (Y - y)F'_y + (Z - z)F'_z = 0 \\ (X - x)G'_x + (Y - y)G'_y + (Z - z)G'_z = 0 \end{cases}$$

Thí dụ:

Viết phương trình của tiếp tuyến với đường:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x^2 + y^2 = Rx$$

Ta có phương trình phải tìm là:

$$\begin{cases} xX + yY + zZ = R^2 \\ (2x - R)X + 2yY = Rx \end{cases}$$

Chú ý: Ta đã xét mặt S: $F(x, y, z) = 0$. Tại điểm $M(x, y, z) \in S$ ta đã giả thiết: F có các đạo hàm riêng liên tục và ít nhất một trong chúng khác không. Khi đó tiếp diện hay pháp tuyến của S tại M được hoàn toàn xác định, ta gọi M là điểm bình thường của S.

Ngược lại, nếu tại $M \in S$ các đạo hàm riêng của F đều triệt tiêu hoặc một trong chúng không tồn tại thì ta gọi M là điểm bất thường của S.

Nếu $\forall M \in S$ đều là điểm bình thường thì S gọi là một mặt trơn. Mặt S gọi là trơn từng phần (mảnh) nếu nó là liên tục và được chia thành một số hữu hạn phần trơn bởi các đường trơn từng phần (đoạn C7 (1.8) T1).

BÀI TẬP

1. Tìm vi phân cung và các cosin chỉ hướng của tiếp tuyến tại một điểm bất kì của các đường:

1) $x^2 + y^2 = a^2$ 2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

3) $y^2 = 2Px$ 4) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

5) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

6) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

2. Tìm vi phân cung và cosin hoặc sin của góc V giữa bán kính cực và tiếp tuyến tại một điểm bất kỳ của các đường.

1) $r = a\varphi$ 2) $r = \dfrac{a}{\varphi}$

3) $r = \dfrac{a}{\cos^2 \dfrac{\varphi}{2}}$ 4) $r = a\cos^2 \dfrac{\varphi}{2}$

5) $r = a^{\varphi}$ 6) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$

3. Tìm độ cong và bán kính cong tại một điểm tùy ý của các đường.

1) $y = ax^2$ 2) $y = x^3$

3) $y = \sin x$ 4) $y = a\mathrm{ch}\, x/a$

5) $y = a\ln\left(\cos \dfrac{x}{a}\right)$ 6) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$

7) $x = a\mathrm{ch}\, t$, $y = b\mathrm{sh}\, t$ 8) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

9) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ 10) $r = a(1 + \cos\varphi)$

11) $r = a\varphi$ 12) $r = ae^{m\varphi}$

4. 1) Tìm bán kính cong bé nhất của đường $y^2 = 2px$

2) Tìm độ cong lớn nhất của đường $y = a\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$

5. Tìm toạ độ của tâm cong của các đường:

1) $xy = 1$ tại $(1, 1)$ 2) $ay^2 = x^3$ tại (a, a)

6. Viết phương trình đường tròn mật tiếp với các đường

1) $y = x^2 - 6x + 10$ tại $(3, 1)$

2) $y = e^x$ tại $(0, 1)$

7. Lập phương trình túc bế của các đường:

1) $x = a\ln\dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$

2) $x = a(t - \sin t)$ $y = a(1 - \cos t)$

3) $x = t^2$ $y = t^3$

4) $x = a.(\cos t + t\sin t)$ $y = a.(\sin t - t\cos t)$

5) $r = a(1 + \cos\varphi)$

6) $r = e^{\lambda\varphi}$

8. Chứng minh rằng nếu (x_0, y_0) là toạ độ của tâm cong của đường

$$x = x(t),\ y = y(t),\ a \le t \le b.$$

thì:

$$\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} = \frac{x_0'^2 + y_0'^2}{x_0'y_0'' - x_0''y_0'}$$

9. Tìm và phân loại các điểm bất thường của các đường cong:

1) $y^2 = -x^2 + x^4$

2) $(y - x^2)^2 = x^5$

3) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (lá Descartes)

4) $y^2(a - x) = x^3$ (cissoide)

5) $x^2 + y^4 = x^6$

10. Tìm hình bao của các họ đường cong:

1) $y = (x - c)^3$

2) $y^3 = (x - c)^2$ (paraboles de Neil)

3) $(a+x)(y-c)^2 = x^2(a-x)$, $a = const$

4) $y^2 = 2px + p^2$

5) Họ đường thẳng lập với các trục toạ độ các tam giác có diện tích không đổi S.

11. Xác định các đường là tốc đồ của các hàm vecteur :

1) $\vec{r} = \vec{a}t + \vec{c}$ 2) $\vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t$

3) $\vec{r} = \vec{a}\cos t + \vec{b}\sin t$ 4) $\vec{r} = \vec{a}\,\mathrm{ch}t + \vec{b}\,\mathrm{sh}t$

$\vec{a}$. $\vec{b}$, $\vec{c}$ là các vectơ không đổi $\vec{a} \perp \vec{b}$

12. Tính đạo hàm theo tham số t của thể tích V của hình hộp dựng trên ba vecteur :

$$\vec{a} = \vec{i} + t\vec{j} + t^2\vec{k}$$

$$\vec{b} = 2t\vec{i} - \vec{j} + t^3\vec{k}$$

$$\vec{c} = -t^2\vec{i} + t^3\vec{j} + \vec{k}$$

13 Phương trình của một chuyển động là:

$$\vec{r} = \vec{i}\cos\alpha\cos\omega t + \vec{j}\sin\alpha\cos\omega t + \vec{k}\sin\omega t$$

α, ω là các hằng số, t là thời gian, xác định quĩ đạo của chuyển động, độ lớn và hướng của vận tốc và gia tốc của chuyển động.

14. Tìm các vecteur $\vec{\tau}$, $\vec{v}$, $\vec{\beta}$ của các đường:

1) $x = t\sin t$, $y = t\cos t$, $z = t.e^t$ tại gốc toạ độ

2) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = \cos 2t$ tại 1 điểm tùy ý.

15. Viết phương trình của tiếp tuyến pháp tuyến chính và trùng pháp tuyến tại một điểm tùy ý của đường:

$$x = \frac{t^4}{4}, \quad y = \frac{t^3}{3}, \quad z = \frac{t^2}{2}$$

Tìm các điểm của đường, tại đó tiếp tuyến với đường song song với mặt phẳng: $x + 3y + 2z - 10 = 0$.

***16**. Viết phương trình mặt phẳng mật tiếp, mặt phẳng pháp, mặt phẳng trục đạc của đường

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $x^2 - y^2 + z^2 = 4$ tại $M(1, 1, 2)$

2) $y^2 = x$, $x^2 = z$ tại điểm tùy ý

3) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ tại 1 điểm tùy ý.

17. Viết phương trình của tiếp tuyến và mặt phẳng pháp với các đường:

1) $x = R\cos^2 t$, $y = R\sin t\cos t$, $z = R\sin t$ tại $t = \dfrac{\pi}{4}$

2) $z = x^2 + y^2$, $x = y$ tại (1, 1, 2)

18. Tìm các vecteur $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ và viết phương trình của mặt phẳng mật tiếp, pháp tuyến chính và trùng pháp tuyến với đường (xoắn ốc conique).

$x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = bt$ tại gốc toạ độ.

19. Tìm độ cong của các đường:

1) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \mathrm{ch}t$ tại $t = 0$

2) $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = bt$ tại gốc toạ độ.

3) $x = \ln\cos t$, $y = \ln\sin t$, $z = t\sqrt{2}$ tại t tùy ý

*4) $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$ tại (x, y, z) tùy ý

20 Tìm độ xoắn của các đường tại 1 điểm tùy ý:

1) $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$

2) $x = a\,\mathrm{ch}t\cos t$, $y = a\,\mathrm{ch}t\sin t$, $z = at$

3) $y^2 = x$, $x^2 = z$

21. Tìm độ cong và độ xoắn của các đường tại 1 điểm tùy ý.

1) $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$

2) $x = a\,\mathrm{ch}t$, $y = a\,\mathrm{sh}t$, $z = at$

3) $2ay = x^2$, $6a^2z = x^3$

***22**. Chứng minh rằng:

1) Nếu độ cong tại mọi điểm của một đường bằng không thì đường đó là đường thẳng.

2) Nếu độ xoắn tại mọi điểm của 1 đường bằng không thì đường đó là 1 đường cong phẳng.

23. Chứng minh đường $x = 1 + 3t + 2t^2$, $y = 2 - 2t + 5t^2$, $z = 1 - t^2$ là một đường cong phẳng.

Tìm mặt phẳng chứa nó.

24. Viết phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với các mặt:

1) $z = x^2 + y^2$ tại (1, -2.5)

2) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0$ tại (4, 3, 4)

3) $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ tại $(R\cos\alpha, R\sin\alpha, R)$

4) $x = a\cos\theta\cos\varphi$, $y = b\cos\theta\sin\varphi$, $z = c\sin\theta$ tại $M_0(\varphi_0, \theta_0)$

5) $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = r\,\mathrm{cotg}\,\alpha$ tại $M_0(\varphi_0, r_0)$

25. 1) Tìm trên mặt $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ những điểm tại đó các tiếp diện là song song với các mặt phẳng toạ độ

2) Tìm góc giữa các mặt: $x^2 + y^2 = R^2$, $(x - R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$ tại $M(\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}, 0)$

3) Chứng minh rằng pháp tuyến tại một điểm bất kỳ trên mặt tròn xoay $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, $(f' \neq 0)$ cắt trục quay của nó.

4) Tìm các điểm trên mặt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ tại đó pháp tuyến của mặt hợp với các trục toạ độ các góc bằng nhau.

HƯỚNG DẪN VÀ TRẢ LỜI BÀI TẬP

1. 1) $ds = \frac{a}{y}dx$, $\cos\alpha = \frac{y}{a}$, $\sin\alpha = \frac{-x}{a}$

2) $ds = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4 - c^2x^2}{a^2 - x^2}}dx$; $\cos\alpha = \frac{a\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^4 - c^2x^2}}$

$\sin\alpha = -\frac{bx}{\sqrt{a^4 - c^2x^2}}$; $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

3) $ds = \frac{1}{y}\sqrt{P^2 + y^2}\,dx$, $\cos\alpha = \frac{y}{\sqrt{P^2 + y^2}}$; $\sin\alpha = \frac{P}{\sqrt{P^2 + y^2}}$

4) $ds = \sqrt[3]{\dfrac{a}{x}}\,dx$, $\cos\alpha = \sqrt[3]{\dfrac{x}{a}}$; $\sin\alpha = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{a}}$

5) $dx = 2a\sin\dfrac{t}{2}\,dt$; $\cos\alpha = \sin\dfrac{t}{2}$; $\sin\alpha = \cos\dfrac{t}{2}$

6) $dx = 3a\sin t.\cos t.dt$, $\cos\alpha = -\cos t$, $\sin\alpha = \sin t$

2. 1) $ds = a\sqrt{1+\varphi^2}\,.d\varphi$. $\cos V = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$

2) $ds = \dfrac{a}{\varphi^2}\sqrt{1+\varphi^2}\,.d\varphi$, $\cos V = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$

3) $ds = \dfrac{a}{\cos^3\dfrac{\varphi}{2}}\,d\varphi$, $\sin V = \cos\dfrac{\varphi}{2}$

4) $ds = a\cos\dfrac{\varphi}{2}\,d\varphi$, $\sin V = \cos\dfrac{\varphi}{2}$

5) $ds = r\sqrt{1+(\ln a)^2}\,d\varphi$, $\sin V = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\ln a)^2}}$

6) $ds = \dfrac{a^2}{r}\,d\varphi$, $\sin V = \cos 2\varphi$

3. 1) $K = \dfrac{1}{R} = \dfrac{2|a|}{(1+4a^2x^2)^{3/2}}$ 2) $K = \dfrac{1}{R} = \dfrac{6|x|}{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}$

3) $K = \dfrac{1}{R} = \dfrac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$ 4) $K = \dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{aCh^2\dfrac{x}{a}}$

5) $K = \dfrac{1}{R} = \dfrac{\left|\cos\dfrac{x}{a}\right|}{a}$ 6) $R = \dfrac{1}{K} = \left|\dfrac{3}{2}a\sin 2t\right|$

7) $K = \dfrac{1}{R} = \dfrac{ab}{(a^2Sh^2t+b^2Ch^2t)^{3/2}}$ 8) $K = \dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{\left|4a\sin\dfrac{t}{2}\right|}$

9) $R = \frac{1}{K} = \frac{a^2}{3r}$

10) $R = \frac{1}{K} = \frac{4}{3}a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|$

11) $R = \frac{1}{K} = \frac{a(1+\varphi^2)^{3/2}}{2+\varphi^2}$

12) $R = \frac{1}{K} = r\sqrt{1+b^2}$

4. 1) $R_{\min} = p$

2) $K_{\max} = \frac{1}{a} \quad (a > 0)$

5. 1) $(2, 2)$

2) $\left(-\frac{11}{2}a, \frac{16}{3}a\right)$

6. 1) $(x-3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

2) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$

7. 1) $y = a\text{ch}\frac{x}{a}$

2) $X = \pi a + a(t - \sin t)$ $\quad Y = -2a + a(1 - \cos t)$

3) $X = -(9t^2 + 2)\frac{t^2}{2}$ $\quad Y = 4(3t^2 + 1)\ \frac{t}{3}$

4) $x^2 + y^2 = a^2$

5) cardioide

6) $r = \lambda e^{\lambda\varphi_1}$ $\quad \varphi_1 = \varphi + \frac{\pi}{2}$

9.

1) Điểm bất thường cô lập (0, 0)

2) Điểm lùi loại hai (0, 0)

3) Điểm nút kép (0, 0)

4) Điểm lùi loại một (0, 0)

5) Điểm bất thường cô lập (0, 0)

10. 1) Hình bao: $y = 0$ (quĩ tích các điểm uốn)

2) Không có hình bao ($y = 0$ quĩ tích các điểm góc)

3) Hình bao: $x = a$, ($x = 0$ quĩ tích các điểm kép)

4) Không có hình bao

5) Hình bao $xy = \frac{s}{2}$

11. 1) Đường thẳng 2) Parabole

3) Ellipse 4) Hyperbole

12. $V'' = 4t(t^2 + 1)$

13. $x = \cos\alpha \cos\omega t$, $y = \sin\alpha\cos\omega t$, $z = \sin\omega t$

(Đường tròn). $\vec{V} = -\omega\vec{i}\cos\alpha\sin\omega t - \omega\vec{j}\sin\alpha\sin\omega t + \omega\vec{k}\cos\omega t$

$$\left|\vec{V}\right| = |\omega|$$

$$\vec{W} = -\omega^2\vec{i}\cos\alpha\cos\omega t - \omega^2\vec{j}\sin\alpha\cos\omega t - \omega^2\vec{k}\sin\omega t$$

$$\left|\vec{W}\right| = \omega^2$$

14.

1) $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$, $\vec{\nu} = \dfrac{2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{6}}$, $\vec{\beta} = \dfrac{\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{3}}$

2) $\vec{\tau} = \dfrac{3\cos t\vec{i} - 3\sin t\vec{j} + 4\vec{k}}{5}$, $\vec{\nu} = \sin t\vec{i} + \cos t\vec{j}$

$$\vec{\beta} = \frac{4\cos t\vec{i} - 4\sin t\vec{j} - 3\vec{k}}{5}$$

15.

$$\frac{x - \frac{t^4}{4}}{t^2} = \frac{y - \frac{t^3}{3}}{t} = \frac{z - \frac{t^2}{2}}{1}$$ (tiếp tuyến)

$$\frac{x - \frac{t^4}{4}}{t^3 + 2t} = \frac{y - \frac{t^3}{3}}{1 - t^4} = \frac{z - \frac{t^2}{2}}{-2t^3 - t}$$ (pháp tuyến chính)

$$\frac{x - \frac{t^4}{4}}{1} = \frac{y - \frac{t^3}{3}}{-2t} = \frac{z - \frac{t^2}{2}}{t^2}$$ (trùng pháp tuyến)

$M_1\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$; $M_2\left(4, -\frac{8}{3}, 2\right)$

16. 1) $2x - z = 0$: Mặt phẳng pháp.

$y - 1 = 0$: Mặt phẳng mật tiếp.

$x + 2z - 5 = 0$: Mặt phẳng trực đạc.

2) $6y_0^2(x - x_0) - 8y_0^3(y - y_0) - (z - z_0) = 0$

$2y_0(x - x_0) + (y - y_0) + 4y_0^3.(z - z_0) = 0$

$(1 - 32y_0^6)(x - x_0) - 2y_0.(12y_0^4 + 1).(y - y_0) + 2y_0^2.(8y_0^2 + 3).(z - z_0) = 0$

3) $e^{-t_0}x - e^{t_0}y - \sqrt{2}z + 2t_0 = 0$

$e^{t_0}x - e^{-t_0}y + \sqrt{2}z + 2(t_0 + Sh2t_0) = 0$

$x + y - \sqrt{2}Sht_0 z + 2(t_0 Sht_0 - Cht_0) = 0$

17.

1) $\dfrac{x - \frac{R}{2}}{2} = \dfrac{y - \frac{R}{2}}{0} = \dfrac{z - \sqrt{2}\frac{R}{2}}{-\sqrt{2}}$, $x\sqrt{2} - z = 0$

2) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{4}$, $x + y + 4z - 10 = 0$

18.

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{i} + b\vec{k}}{\sqrt{1+b^2}} \; ; \; \vec{\beta} = \frac{-b\vec{i} + \vec{k}}{\sqrt{1+b^2}} \; ; \; \vec{V} = \vec{j}$$

$$bx - z = 0 \;, \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + bz = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

19 1) $\sqrt{2}$ 2) $\dfrac{2}{1+b^2}$

3) $\dfrac{|\sin 2t|}{\sqrt{2}}$ 4) $\dfrac{(a+b)^{1/2}}{(a+b+2z)^{3/2}}$

20. 1) $\dfrac{e^t}{3}$ 2) $\dfrac{1}{ach^2 t}$

3) $\dfrac{-12y}{(64y^6 + 36y^4 + 1)}$

21. 1) $K = T = \dfrac{1}{3(t^2+1)^2}$ 2) $K = T = \dfrac{1}{2ach^2 t}$

3) $K = T = \dfrac{a}{(a+y)^2}$

23. $2x + 3y + 19z - 27 = 0$

24.

1) $2x - 4y - z - 5 = 0$, $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-5}{-1}$

2) $3x + 4y - 6z = 0$, $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{-6}$

3) $x\cos\alpha + y\cos\alpha - R = 0$, $\dfrac{x - R\cos\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{y - R\sin\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{z-R}{0}$

4) $\dfrac{x}{a}\cos\theta_0\cos\varphi_0 + \dfrac{y}{b}\cos\theta_0\sin\varphi_0 + \dfrac{z}{c}\sin\theta_0 = 1$

$$\frac{x\sec\theta_0\sec\varphi_0 - a}{bc} = \frac{y\sec\theta_0\operatorname{cosec}\varphi_0 - b}{ac} = \frac{z\operatorname{cosec}\theta_0 - c}{ab}$$

5) $x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 - z\,tg\alpha = 0$

$$\frac{x - r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0} = \frac{y - r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0} = \frac{z - r_0\cot g\alpha}{-tg\alpha}$$

25.

1) $(1, \pm 1, 0)$, $\| Oxz$

2) $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$: $\| Oyz$; $\| Oxy$ không có

3) $\dfrac{\pi}{3}$

4) $\left(\pm\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \pm\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \pm\dfrac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$

Chương 9

TÍCH PHÂN BỘI

Trong bài tích phân xác định ta đã nghiên cứu tích phân của hàm một biến $y = f(x)$ trong đoạn $[a, b]$ nào đó. Trong chương này ta sẽ nghiên cứu tích phân của hàm hai biến và ba biến trong một miền nào đó gọi là tích phân kép và tích phân bội ba, còn tích phân của hàm một biến đã nghiên cứu cũng gọi là tích phân đơn.

A. TÍCH PHÂN KÉP

§1. KHÁI NIỆM TỔNG QUÁT

1.1. Định nghĩa

- Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định và bị chặn trong một miền compact D.

- Chia D ra n phần bất kỳ không dẫm lên nhau, gọi tên và diện tích của chúng lần lượt là:

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_i, \ldots, \Delta S_n$$

- Chọn điểm bất kỳ $P_i(x_i, y_i) \in \Delta S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

- Lập tổng

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$$

- Ký hiệu d_i là đường kính của ΔS_i ($i = 1, 2,..., n$) (đường kính của một miền là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm bất kỳ của miền)và $d = \max d_i$. Nếu tổng I_n có giới hạn là I khi $n \to \infty$ sao cho $d \to 0$ không phụ thuộc cách chia miền D và cách chọn các điểm P_i thì I gọi là tích phân kép của hàm số $z = f(x, y)$ trên miền D. Ký hiệu

$$I = \iint_D f(x, y)\,dS \quad hay \quad I = \iint_D f(P)\,dS$$

Tổng I_n gọi là tổng tích phân thứ n, $f(x, y)$, $f(x, y)dS$ gọi là hàm số và biểu thức dưới dấu tích phân.

Nếu $f(x, y)$ có tích phân trong miền D thì $f(x, y)$ gọi là khả tích trong miền đó.

1.2. Điều kiện khả tích

Tương tự như đối với tích phân đơn ta có: ***Điều kiện cần và đủ để hàm bị chặn f(P) khả tích trên miền compact D là:*** $\lim\limits_{d \to 0}(S - s) = 0$

(điều kiện Riemann), trong đó

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta S_i \; ; \quad S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta S_i \; ;$$

$$m_i = \inf_{P \in \Delta S_i} (P) \; ; \quad M = \sup_{P \in \Delta S_i} f(P)$$

S (s) gọi là tổng Darboux trên (dưới) của hàm f(P) trên miền D.

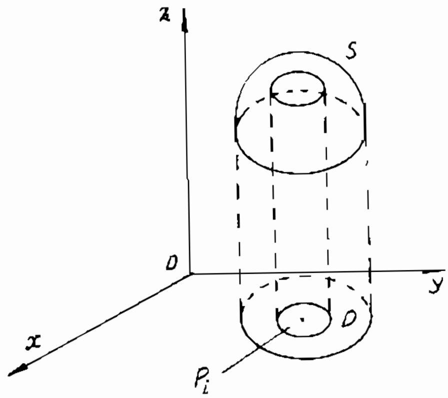
Từ điều kiện Riemann, tương tự như đối với tích phân đơn ta có thể chứng minh: ***Mọi hàm liên tục f(P) trên miền compact D đều khả tích trên miền đó.***

1.3. Ý nghĩa hình học và cơ học của tích phân kép

1) Ý nghĩa hình học

Về hình học, cho hàm $z = f(x, y)$ xác định trong miền *D*, nghĩa là cho mặt *S* có phương trình $z= f(x, y)$, mặt này có hình chiếu trên mặt phẳng *xoy* là miền D. Người ta gọi hình giới hạn bởi mặt S mặt trụ có đường chuẩn là biên của miền D, đường sinh song song với trục oz và mặt phẳng xoy là một hình trụ cong (H 116)

Giả sử $f(x, y) > 0$, ta thấy: $f(x_i, y_i).\Delta S_i$, chính là thể tích hình trụ đáy ΔS_i và chiều cao là $f(x_i, y_i)$ khi ΔS_i khá nhỏ thì có thể coi thể tích này gần đúng là thể tích hình trụ cong cùng đáy ΔS_i. Do đó $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ có thể coi gần đúng là thể tích hình trụ cong đáy là cả miền D. Một cách lý tưởng ta định nghĩa thể tích V của hình trụ cong đó là $V = \lim\limits_{d \to 0} I_n$, $d = \max d_i$, d_i là đường kính của miền ΔS_i.



Hình 116

Theo định nghĩa tích phân kép thì $V = \iint\limits_D f(x,y)dS$. Như vậy, về mặt hình học khi $f(x, y) > 0$ thì tích phân kép $\iint\limits_D f(x,y)dS$ là thể tích hình trụ cong, đáy dưới là miền D, đáy trên là mặt $z= (x, y)$ và đường sinh song song với trục oz.

2) Ý nghĩa cơ học

Giả sử $f(x, y) > 0$ và coi $f(x, y)$ là mật độ khối lượng (mặt) của bản mỏng D thì $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta S_i$ có thể coi gần đúng là khối lượng của bản D, một cách lý tưởng ta định nghĩa khối lượng của bản D là $m = \lim\limits_{d \to 0} I_n$.

Theo định nghĩa tích phân kép thì $m= \iint\limits_D f(x,y)dS$. Như vậy về cơ học khi $f(x, y) > 0$ thì tích phân kép: $\iint\limits_D f(x,y)dS$ là khối lượng của bản mỏng D có mật độ khối lượng (mặt) là $f(x, y)$.

Chú ý: Nếu $f = 1$ trên D thì

$$\iint_D f(P)dS = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} 1.\Delta S_i = S \text{ là diện tích miền } D.$$

1.4. Tính chất của tích phân kép

Tích phân kép cũng có các tính chất tương tự như đối với tích phân đơn:

1) Nếu *f(P)*, *g(P)* khả tích trên miền D thì $f(P) \pm g(P)$ cũng khả tích trên D và:

$$\iint_D [f(P) \pm g(P)]dS = \iint_D f(P)dS \pm \iint_D g(P)dS$$

2) Nếu *f(P)* khả tích trên miền D thì $kf(P)$, k = const cũng khả tích trên miền D và

$$\iint_D kf(P)dS = k\iint_D f(P)dS$$

3) Nếu D được chia thành hai miền D_1, D_2: $D = D_1 \cup D_2$ bởi một đường, *f(P)* khả tích trên D thì *f(P)* khả tích trên D_1, D_2 và ngược lại, khi đó:

$$\iint_D f(P)dS = \iint_{D_1} f(P)dS + \iint_{D_2} f(P)dS$$

4) Nếu *f*(P), *g*(P) khả tích trên miền D và $f(P) \le g(P) \quad \forall P \in D$ thì:

$$\iint_D f(P)dS \le \iint_D g(P)dS$$

5) Nếu *f(P)* khả tích trên miền D thì $|f(P)|$ cũng khả tích trên D và:

$$\left|\iint_D f(P)dS\right| \le \iint_D |f(P)|\,dS$$

6) Nếu *f(P)* khả tích trên miền D và $m = \inf_{P \in D} f(P); M = \sup_{P \in D} f(P);$ thì: $mS \le \iint_D f(P)dS \le MS$, với S là diện tích của miền D.

7) Nếu $f(P)$ liên tục trên miền D thì tồn tại điểm $\overline{P}_c \in D$ sao cho:

$\iint_D f(P)dS = f(\overline{P}_c).S$, S là diện tích miền D. $f(\overline{P}_c) = \dfrac{1}{S}\iint_D f(P)dS$ gọi là giá trị trung bình của $f(P)$ trên D.

Các tính chất trên được chứng minh tương tự như đối với các tính chất của tích phân đơn. Chẳng hạn xét 7). Từ 6) ta có:

$$m \le \frac{1}{S}\iint_D f(P)dS \le M$$

Vì $f(P)$ liên tục trên D nên m, M là giá trị bé nhất và lớn nhất của $f(P)$ trên D. Đặt $\gamma = \dfrac{1}{S}\iint_D f(P)dS$ thì theo định lý lấy giá trị trung gian của hàm liên tục, $\exists\, \overline{P}_c \in D$ sao cho

$$f(\overline{P}_c) = \gamma = \frac{1}{S}\iint_D f(P)dS\ .$$

§2. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN KÉP

2.1. Tọa độ Descartes

a) Miền chữ nhật: ***Cho hàm f (x, y) xác định trên miền chữ nhật***

$$D:\ a \le x \le b,\ c \le y \le d.$$

Định lý: ***Nếu tồn tại các tích phân***

$$\iint_D f(x,y)dS \quad (1) \quad \text{và} \quad I(x) = \int_c^d f(x,y)dy,\quad a \le x \le b \ (2)$$

thì tồn tại

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx \qquad (3)$$

và

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx \qquad (4)$$

ký hiệu

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$$

và tích phân này gọi là một tích phân lặp hay tích phân hai lớp.

Chứng minh: Chia miền D thành một số hữu hạn miền nhỏ bởi các đường thẳng song song với các trục toạ độ (hình 117)

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n+1} = b,$$

$$c = y_1 < y_2 < \ldots < y_k < y_{k+1} < \ldots < y_{m+1} = d$$

Xét phần được chia (D_{ik}) có diện tích là $\Delta x_i \Delta y_k$ trong đó $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ $(i = 1, 2, \ldots, n,\ k = 1, 2, \ldots, m)$.

Đặt

$$m_{ik} = \inf_{(D_{ik})} f(x,y), \quad M_{ik} = \sup_{(D_{ik})} f(x,y)$$

thì trên (D_{ik}) ta có: $m_{ik} \le f(x, y) \le M_{ik}$.

Trên $[x_i, x_{i+1}]$ chọn $x = \xi_i$ tùy ý thì:

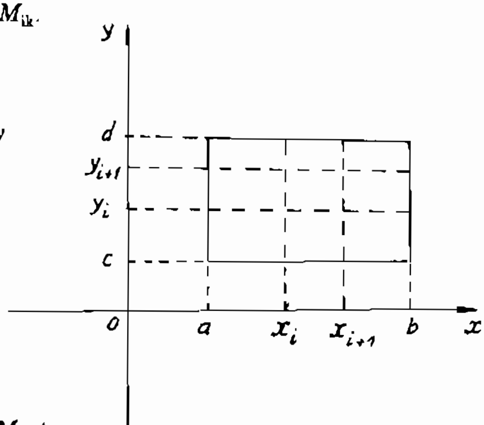
$$\int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} m_{ik}dy \le \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)dy \le \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} M_{ik}dy$$

hay

$$m_{ik}\Delta y_k \le \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)dy \le M_{ik}\Delta y_{k+1}$$

Từ giả thiết (2) suy ra:

$$\sum_{k=1}^{m} m_{ik}\Delta y_k \le I(\xi_i) = \int\limits_c^d f(\xi_i, y)dy \le \sum_{k=1}^{m} M_{ik}\Delta y_k$$



Hình 117

và

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sum_{k=1}^{m} m_{ik} \Delta y_k \le \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sum_{k=1}^{m} M_{ik} \Delta y_k$$

Tổng ở giữa chính là tổng tích phân của hàm $I(x)$ trên đoạn $[a, b]$, các tổng ở hai bên là các tổng Darboux dưới s và trên S của hàm $f(x, y)$ trên D nghĩa là:

$$s \le \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i \le S$$

Theo giả thiết (1) thì:

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_k \to 0}} \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i = \iint_D f(x, y)dS$$

vậy:

$$\iint_D f(x, y)dS = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$$

Hoán vị vai trò x, y cùng với (4) ta cũng có:

$$\iint_D f(x, y)dS = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx \qquad (4')$$

với giả thiết $y = \text{const}$, $\int_a^b f(x, y)dx$ tồn tại. Vậy:

$$\iint_D f(x, y)dS = \int_a^b f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx$$

nghĩa là có thể thay đổi thứ tự lấy tích phân (theo x, y). Do (4) (4') ta cũng ký hiệu

$$\iint_D f(x, y)dS = \iint_D f(x, y)dxdy$$

Thí dụ:

1) Tính

$$I = \iint_D (x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4)dxdy$$

D là hình chữ nhật $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$, ở đây $a = 0$, $b = 2$, $c = 0$, $d = 2$.

Do đó theo công thức (4)

$$I = \int_0^2 dx \int_0^2 (x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4)dy = \int_0^2 (x^2 y + \frac{y^3}{3} - 2xy - y^2 + 4y)\Big|_0^2 dx$$

$$= \int_0^2 (2x^2 + \frac{8}{3} - 4x - 4 + 8)dx = (\frac{2x^3}{3} - 2x + \frac{20}{3}x)\Bigg|_0^2 = 10\frac{2}{3}$$

2) Tính:

$$I = \iint_D \frac{xdxdy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

D là hình chữ nhật $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

Ta có:

$$I = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{xdx}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Tính

$$\Phi(y) = \int_0^1 \frac{xdx}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2 + 2}}$$

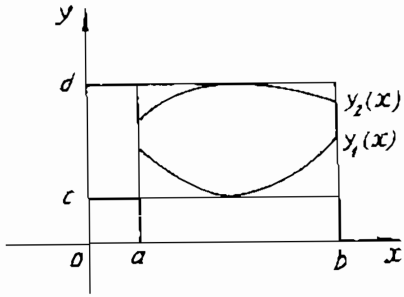
Do đó

$$I = \int_0^1 \Phi(y)dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2 + 2}} \right) dy = \ln\left(\frac{y + \sqrt{y^2 + 1}}{y + \sqrt{y^2 + 2}} \right)\Bigg|_0^1 = \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}$$

b) Miền cong: Xét miền D giới hạn bởi các đường liên tục:

$$y = y_1(x),\ y = y_2(x),\ y_1(x) \le y_2(x),\ a \le x \le b$$

và các đường thẳng $x = a,\ x = b$.



Hình 118

Định lý: ***Nếu hàm $f(x, y)$ khả tích trên miền D như trên, khi $x = const$ tích phân đơn $\Phi(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$ tồn tại thì tồn tại tích phân lặp***

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$$

và $$\iint\limits_D f(x, y)dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$$

Chứng minh:

Xét hình chữ nhật R giới hạn bởi các đường thẳng

$$x = a,\ x = b,\ y = c = \min_{a \le x \le b} y_1(x)$$

$$y = d = \max_{a \le x \le b} y_2(x) \qquad \text{(H.118)}$$

và hàm

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \textit{nếu} \quad (x, y) \in D \\ 0 & \textit{nếu} \quad (x, y) \in R \setminus D \end{cases}$$

Rõ ràng hàm $F(x, y)$ thoả mãn các điều kiện của định lý ở a)

Thực vậy:

$$\iint\limits_D F(x, y)dS = \iint\limits_D f(x, y)dS$$

mặt khác

$$\iint\limits_{R\setminus D} F(x,y)dS = 0$$

Do đó hàm $F(x,y)$ khả tích trên R và

$$\iint\limits_{R} F(x,y)dS = \iint\limits_{D} f(x,y)dS \qquad (1), \text{ tồn tại.}$$

Xét $x = \text{const}$ và tích phân

$$\int_c^d F(x,y)dy = \int_c^{y_1(x)} F(x,y)dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x,y)dy + \int_{y_2(x)}^{d} F(x,y)dy$$

Tích phân thứ nhất và tích phân thứ ba ở vế phải tồn tại và bằng 0, còn tích phân thứ hai

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x,y)dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

do đó

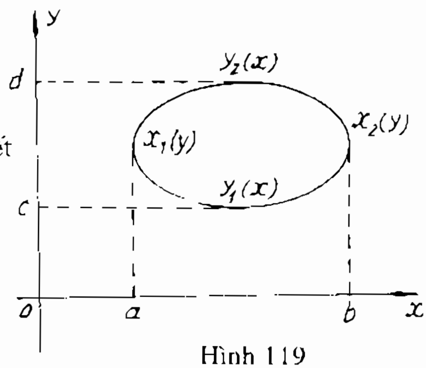
$$\int_c^d F(x,y)dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \qquad (2)$$

Theo giả thiết của định lý, tích phân ở vế phải tồn tại nên $\int_c^d F(x,y)dy$ tồn tại. Vậy theo định lý ở a) ta có:

$$\iint\limits_{D} F(x,y)dS = \int_a^b dx \int_c^d F(x,y)dy.$$

Theo (1) và (2) thì công thức này viết được:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dS = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \qquad (3)$$



Hình 119

Nếu miền D giới hạn bởi các đường:

$x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $x_1(y) \le x_2(y)$ $(c \le y \le d)$ và các đường thẳng $y = c$, $y = d$ (Hình 119) thì chứng minh tương tự như đối với (3) ta có:

$$\iint_D f(x,y)dS = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \qquad (3')$$

Chú ý:

1) Nếu các đường thẳng song song với các trục toạ độ cắt biên của miền D không quá 2 điểm (H.119) thì theo định lý trên ta có công thức:

$$\iint_D f(x,y)dS = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dx,$$ nghĩa là ta có thể thay đổi thứ tự lấy tích phân và ta cũng ký hiệu

$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_D f(x,y)dxdy$$

2) Miền D trong định lý trên cũng gọi là miền đơn giản. Nếu D không phải là miền đơn giản, khi đó để tính $\iint_D f(x,y)dS$, ta phải chia miền D thành những miền đơn giản đã xét, và tích phân trên miền D sẽ bằng tổng các tích phân trên các miền đơn giản.

Thí dụ:

1) Tính

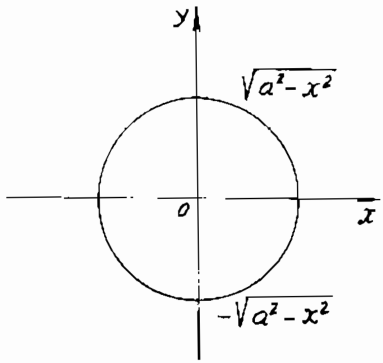
$$I = \iint_D y^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dxdy$$

D là hình tròn: $x^2 + y^2 \le a^2$

Theo (H.120) và công thức (3) ta có

$$I = \int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2\sqrt{a^2-x^2}\,dy$$

$$= \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2 dy$$



Hình 120

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2 dy\,.$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{4}{3}\int_0^a (a^2 - x^2)^2\,dx = \frac{32}{45}a^5.$$

2) Tính

$$\iint_D (12 - 3x - 4y)dxdy$$

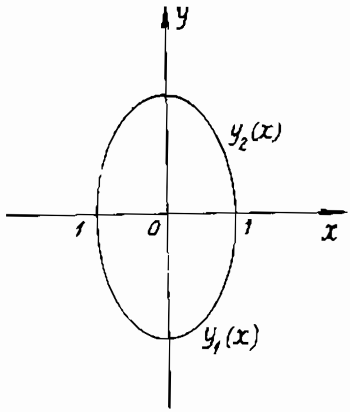
D là hình ellipse (H.121):

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} \le 1$$

Ta có $a = -1$, $b = 1$,

$y_1(x) = -2\sqrt{1-x^2}$,

$y_2(x) = 2\sqrt{1-x^2}$ (giải y theo x từ phương trình ellipse).



Hình 121

Vậy

$$I = \int_1^1 dx \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} (12 - 3x - 4y)dy$$

Xét

$$\Phi(x) = \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} (12 - 3x - 4y)dy$$

ở đây $f(x, y) = 12 - 3x - 4y$ là hàm không chẵn, lẻ đối với y nên:

$$\Phi(x) = \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} [f(x,y) + f(x,-y)]dy = \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} [12 - 3x - 4y + (12 - 3x + 4y)]dy$$

$$= 6(4-x)\int_0^{2\sqrt{1-x^2}} dy = 12(4-x)\sqrt{1-x^2}.$$

Do đó $I = \int_{-1}^{1} \Phi(x)dx$, ở đây $\Phi(x)$ cũng là hàm không chẵn, lẻ đối với x nên:

$$I = \int_0^1 [\Phi(x) + \Phi(-x)]dx = 12\int_0^1 [(4-x)\sqrt{1-x^2} + (4+x)\sqrt{1+x^2}\,]dx$$

$$= 96\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 96\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right)\Bigg|_0^1 = 96.\frac{\pi}{4} = 24\pi$$

3) Thay đổi thứ tự lấy tích phân

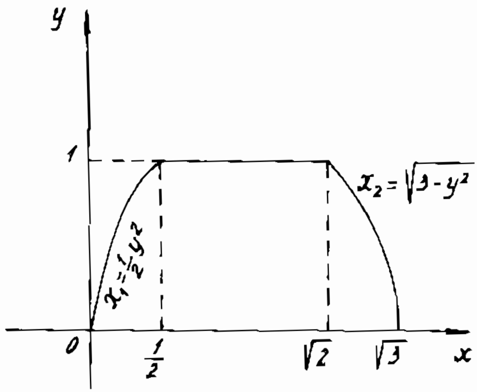
$$I = \int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$$

Tích phân này có dạng của công thức (3') với $c = 0$,

$d = 1,\ x_1(y) = \dfrac{1}{2}y^2$,

$x_2(y) = \sqrt{3-y^2}$.

Ta có miền D như hình (H. 122)



Hình 122

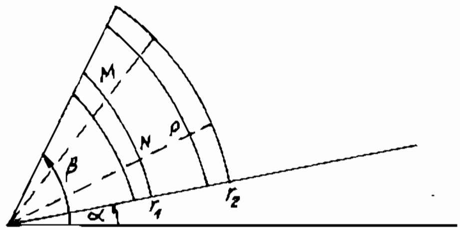
Thay đổi thứ tự lấy tích phân trên ta có:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f(x,y)dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dy$$

2.2. Tọa độ độc cực

Xét $$\mathbf{I} = \iint\limits_{\mathbf{D}} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \varphi)\mathbf{dS} \qquad (1)$$

trong đó D là miền trong toạ độ cực. Tương tự như toạ độ Decartes, đầu tiên xét D giới hạn bởi 2 tia $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ và các đường tròn $r = r_1$, $r = r_2$ với $\alpha \leq \beta$, $r_1 \leq r_2$ (H.123)



Hình 123

Chia D ra n phần bởi các tia φ = const, r = const. Xét một phần được chia: gồm giữa các đường φ_i = const, $\varphi_i + \Delta\varphi_i$ = const, r_i = const, $r_i + \Delta r_i$ = const. Coi gần đúng phần này như một hình chữ nhật cạnh là MN và NP thì diện tích của nó là: $\Delta S_i = MN.\, NP = r_i \Delta\varphi_i \Delta r_i$.

Vậy ta có tổng tích phân của $F(r, \varphi)$ trên D là:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} F(r_i, \varphi_i) r_i \Delta\varphi_i \Delta r_i$$

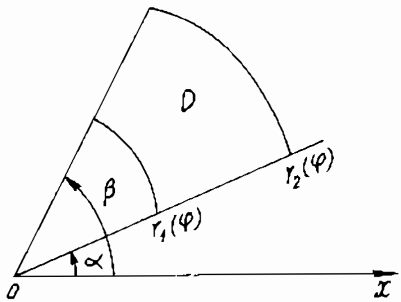
Rõ ràng I_n cũng có thể coi là tổng tích phân của hàm $F(r, \varphi).\, r$ trên miền chữ nhật $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $r_1 \leq r \leq r_2$. Do đó và theo cách tính tích phân kép trong toạ độ Descartes với D là hình chữ nhật thì:

$$I = \iint\limits_{D} F(r,\varphi) r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} F(r,\varphi) r dr \qquad (2)$$

Bây giờ xét D giới hạn bởi $\varphi = \alpha$ = const, $\varphi = \beta$ = const ($\varphi \leq \beta$) và $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$ ($r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi)$) (H.124).

Tương tự như trong tọa độ Descartes, ta có

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r,\varphi)\, r\, dr \qquad (3)$$



Hình 124

Nếu D giới hạn bởi

$r = r_1 = \text{const}$,

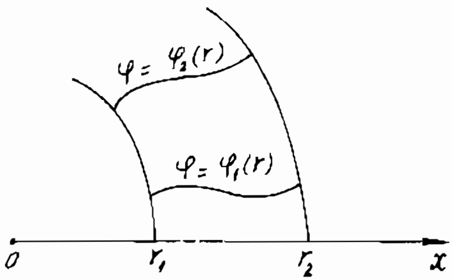
$r = r_2 = \text{const}$,

$r_1 < r_2$, $\varphi = \varphi_1(r)$,

$\varphi = \varphi_2(r)$ $(\varphi_1(r) \le \varphi_2(r))$ (H.125) thì:

$$I = \int_{r_1}^{r_2} r\, dr \int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} F(r,\varphi)\, d\varphi \qquad (4)$$

Xét D là miền giới hạn bởi đường khép kín C mà các tia $\varphi = \text{const}$ và các đường tròn $r = \text{const}$ cắt C không quá hai điểm, khi đó D cũng gọi là miền đơn giản trong tọa độ độc cực (H.126). Giả sử các tia $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ và các đường tròn $r = R_1$, $r = R_2$ $(R_1 < R_2)$ tiếp xúc với C tại A, B, C, D và các cung ACB, ADB, CAD, CBD lần lượt có phương trình là: $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$, $\varphi = \varphi_1(r)$, $\varphi = \varphi_2(r)$.



Hình 125

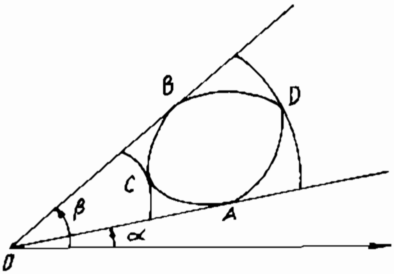
Theo các công thức (3), (4) ta có:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r,\varphi)\, r\, dr = \int_{R_1}^{R_2} r\, dr \int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} F(r,\varphi)\, d\varphi$$

nghĩa là có thể thay đổi thứ tự lấy tích phân.

Đặc biệt: Nếu gốc cực $O \in D$ và D giới hạn bởi đường khép C: $r = r(\varphi)$ ta có:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} F(r,\varphi) r dr \,.$$



Hình 126

Bây giờ xét $I = \iint_D f(x,y)dS$ trong tọa độ Descartes để tính tích phân này, ta có thể chuyển sang toạ độ độc cực. Ta có $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (5).

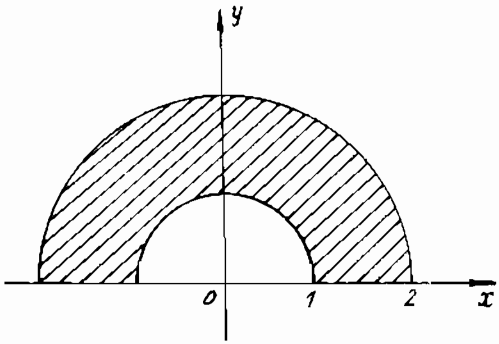
Khi đó $f(x, y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = F(r, \varphi)$ và theo (2) trong tọa độ độc cực $dS = rdrd\varphi$. Vậy

$$\mathbf{I} = \iint_{\mathbf{D}} \mathbf{f(x,y)dS} = \iint_{\mathbf{D'}} \mathbf{f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi} = \iint_{\mathbf{D'}} \mathbf{F(r,\varphi) r dr d\varphi} \qquad (6)$$

trong đó D' là miền trong toạ độ độc cực tương ứng với miền D trong toạ độ Descartes qua phép biến đổi (5). Các công thức (3), (4) sẽ cho cách tính tích phân (6) trong toạ độ độc cực.

Thí dụ:

1) Tính $I = \iint_D (x+y)dS$



Hình 127

trong đó D là hình giới hạn bởi các đường $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = 0$ với $y \geq 0$ (H.127). Đổi sang toạ độ độc cực theo các công thức liên hệ $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ thì các đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ có các phương trình: $r=1$ và $r=2$ (do $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 1$ suy ra $r = 1$, tương tự cho $r = 2$). Do đó:

$$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_1^2 (r\cos\varphi + r\sin\varphi) r\,dr = \int_0^{\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi \int_1^2 r^2 dr$$

$$= (\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{\pi} \left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{14}{3}$$

2) Tính $I = \iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dS$, D là nửa trên của mặt tròn:

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{R^2}{4}.\ (\text{hình } 128)$$

Đổi sang toạ độ độc cực ta có:

$$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

còn đường tròn trên, trong tọa độ độc cực có phương trình: $r = R\cos\varphi$, do đó miền D trong tọa độ độc cực được xác định bởi $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le r \le R\cos\varphi$.

vậy:

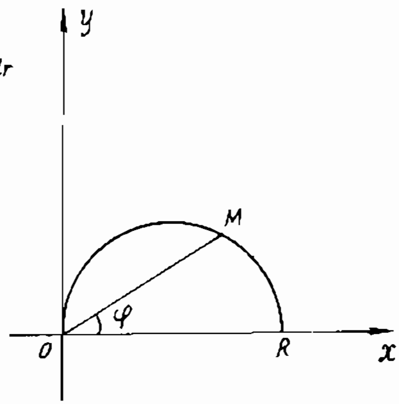
$$I = \iint\limits_D \sqrt{R^2 - r^2}\, dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - r^2}\, r\,dr$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} (R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} d(R^2 - r^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{R\cos\varphi} d\varphi$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(R^2 - R^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}} - R^3] d\varphi$$

$$= \frac{R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\varphi) d\varphi$$



Hình 128

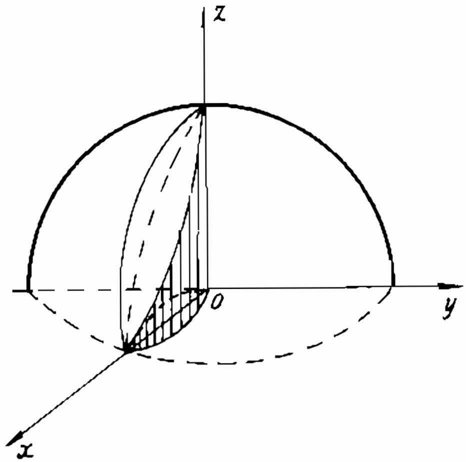
$$= \frac{R^3}{3}\left[\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi\right] = \frac{R^3}{3}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right]$$

($\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{2.1}{3.1}$, xem tích phân xác định, phần tích phân từng phần)

Về hình học I là $\frac{1}{4}$ thể tích V giới hạn bởi mặt trụ $(x - \frac{R}{2})^2 + y^2 = R^2$ mà mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (H.129). Suy ra $V = \frac{4}{3}R^3(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})$. Nếu lấy một nửa thể tích hình cầu: $\frac{2}{3}\pi R^3$ trừ đi V ta có:

$$\frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}R^3(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}) = \frac{8}{9}R^3$$

đó là một số hữu tỷ của R.



Hình 129

2.3. Quy tắc tổng quát đổi biến số của tích phân kép

Tương tự như đối với tích phân đơn ta có:

Định lý: ***Giả sử hàm $z = f(x, y)$ liên tục trên miền compact D để tính tích phân:***

$$I = \iint_D f(x, y)dS \text{ ta đặt } x = x(u, v),\ y = y(u, v) \qquad (1)$$

Nếu:

1) Các hàm (1) có đạo hàm riêng liên tục trong miền compact D' của mặt phẳng Ouv.

2) Các hàm (1) xác định một song ánh từ miền compact D' vào miền compact D của mặt phẳng Oxy.

3) Định thức:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ trong } D'$$

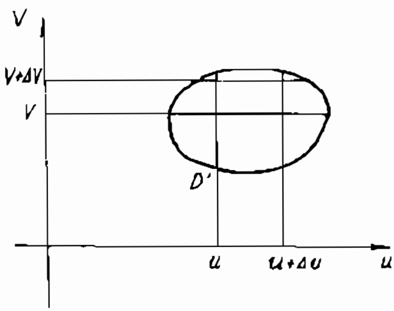
gọi là định thức Jacobi hay Jacobien, ký hiệu $J = \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$ ***thì ta có công thức:***

$$I = \iint\limits_{D} f(x, y)dS = \iint\limits_{D'} f[x(u, v), y(u, v)]\,|\,J\,|\,dvdu \qquad (2)$$

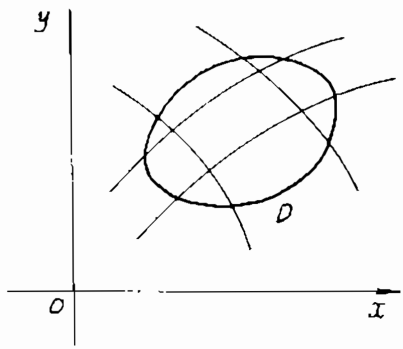
gọi là công thức đổi biến số trong tích phân kép.

*** Chứng minh:**

Cho $v = k = \text{const}$, ($u = h = \text{const}$) thì $x = x(u,k)$, $y = y(u\ k)$ ($x = x(h, v)$, $y = y(h,v)$), là phương trình tham số của một đường cong L, (L') nào đó trong mặt phẳng Oxy, nghĩa là ánh xạ (1) biến các đường thẳng song song với các trục tọa độ Ou, Ov trong mặt phẳng Ouv thành các đường cong trong mặt phẳng Oxy (H.130, H.131).



Hình 130



Hình 131

Do đó nếu chia D' bởi các đường thẳng u = const, v = const thì D' sẽ được chia thành các hình chữ nhật và qua ánh xạ *(1)* miền D sẽ được chia thành những tứ giác cong.

Xét trong miền D', một hình chữ nhật được chia có diện tích $\Delta S'$, giới hạn bởi các đường thẳng u = const, $u + \Delta u$ = const, v = const, $v + \Delta v$ = const.

Tương ứng với tứ giác cong được chia của miền D có diện tích ΔS. Rõ ràng $\Delta S' = \Delta u.\Delta v$ và nói chung $\Delta S'$, ΔS khác nhau. Giả sử:

$$\Delta S = |J|\,\Delta S' = |J|\,\Delta u.\Delta v,\ J \neq 0 \tag{3}$$

Để tính J ta cần tính diện tích ΔS của tứ giác cong. Giả sử toạ độ của các đỉnh của tứ giác cong là:

$$M_1(x_1, y_1),\ \ x_1 = x(u, v),\ y_1 = y(u, v)$$

$$M_2(x_2, y_2),\ x_2 = x(u + \Delta u, v),\ y_2 = y(u + \Delta u, v) \tag{4}$$

$$M_3(x_3, y_3),\ x_3 = x(u + \Delta u, v + \Delta v),\ y_3 = y(u + \Delta u, v + \Delta v)$$

$$M_4(x_4, y_4),\ x_4 = x(u, v + \Delta v),\ y_4 = y(u, v + \Delta v)$$

Theo giả thiết 1) ta bỏ qua các vô cùng bé bậc cao so với Δu, Δv và (4) viết được:

$$x_1 = x(u, v),\ y_1 = y(u, v)$$

$$x_2 = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u,\ y_2 = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u \tag{4'}$$

$$x_3 = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,\ \ y_3 = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v$$

$$x_4 = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,\ y_4 = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v$$

vì $|x_2 - x_1| = |x_4 - x_3| = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u\right|;\ |y_3 - y_1| = |y_3 - y_4| = \left|\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\right|$ nên có thể coi tứ giác cong M_1, M_2, M_3, M_4 gần như một hình bình hành và diện tích ΔS của tứ giác cong đó theo hình học giải tích là:

$$\Delta S = \left|\det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u \\ \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\right|\Delta u\Delta v$$

Theo (3) thì

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

là định thức hàm Jacobi đã phát biểu trong định lý.

Bây giờ ta sẽ chứng minh công thức (2).

Theo định nghĩa nếu chia D thành n miền có dạng tứ giác cong đã xét ở trên thì:

$$I = \iint_D f(x, y)dS = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

Giả sử $(u_i, v_i) \in D'$ tương ứng với $(x_i, y_i) \subset D$ thì $f(x_i, y_i) = f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]$ và theo (3) ta có:

$$I = \lim_{\max d_i \to 0} \sum f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)] \mid J(u_i, v_i) \mid \Delta S_i'$$

Đây chính là tổng tích phân của hàm $f[x(u, v), y(u, v)] \mid J(u, v) \mid$ trên miền D'. Vậy:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D'} f[x(u, v), y(u, v)] \mid J \mid dudv \qquad \left(J = \frac{1}{\Delta},\ \Delta = \frac{D(4, v)}{D(x, y)}\right)$$

Thí dụ: Tính $I = \iint_D (y - x)dxdy$, D giới hạn bởi:

$$y = x + 1,\ y = x - 3,\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3},\quad y = -\frac{1}{3}x + 5$$

Đặt $u = y - x$, $v = y + \frac{1}{3}x$ (1), thì các đường thẳng trên biến thành các đường thẳng $u = 1$, $u = -3$, $v = \frac{7}{3}$, $v = 5$ trong mặt phẳng Ouv. Từ (1) ta có:

$$x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v, \; y = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v \text{ và}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{3}{4}, \quad |J| = \frac{3}{4}$$

Vậy

$$I = \iint\limits_D (y - x)dxdy = \iint\limits_{D'} \left[(\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v) - (-\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v) \right] \frac{3}{4} dudv$$

$$= \iint\limits_{D'} \frac{3}{4} ududv = \frac{3}{4} \int_{\frac{7}{3}}^{5} dv \int_{-3}^{1} udu = -8$$

Trường hợp đặc biệt:

1) u, v là các toạ độ cực $u = r$, $v = \varphi$. Ta có

$$x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi; \; J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

và
$$I = \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$$

2) $u = r$, $v = \varphi$ nhưng $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, r, φ gọi là các tọa độ độc cực suy rộng khi đó $|J| = abr$ và

$$I = \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(ar\cos\varphi, br\sin\varphi)abrdrd\varphi .$$

Thí dụ: Tính $I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$, D là hình ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$.

Chuyển sang toạ độ độc cực suy rộng $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$ thì Jacobien $|J| = abr$ và do tính đối xứng ta có:

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (a^2r^2\cos^2\varphi + b^2r^2\sin^2\varphi)abrdr$$

$$= 4\left(a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi + b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi\right)\int_0^1 abr^3dr$$

$$= 4(a^2+b^2)\frac{\pi}{4}ab\frac{1}{4} = \frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2).$$

§3. ÁP DỤNG CỦA TÍCH PHÂN KÉP

3.1. Áp dụng hình học

1) Tính thể tích và diện tích phẳng

Theo ý nghĩa hình học của tích phân kép thì khi $z = f(x, y) \geq 0$ thể tích của hình trụ cong đáy dưới là miền D, đáy trên là mặt $z = f(x, y)$ và đường sinh song song với trục Oz là:

$$V = \iint_D f(x, y)dS$$

Nếu $f(x, y) < 0$ thì theo tính chất của tích phân kép $\iint_D f(x,y)dS = -V$ $(V > 0)$ do đó để tính thể tích hình học ta có:

$$V = \left|\iint_D f(x, y)dS\right|$$

Đặt biệt khi $z = f(x, y) = 1$ thì $\iint_D 1.dS$ là thể tích hình trụ đáy là miền D và chiều cao bằng 1, số đo thể tích này cũng bằng số đo diện tích miền D. Vậy diện tích của hình phẳng D được tính theo công thức: $S = \iint_D dS$.

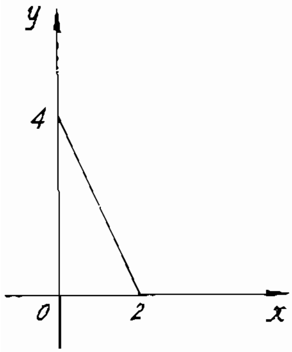
Thí dụ:

1) Tính thể tích V hình giới hạn bởi các mặt:

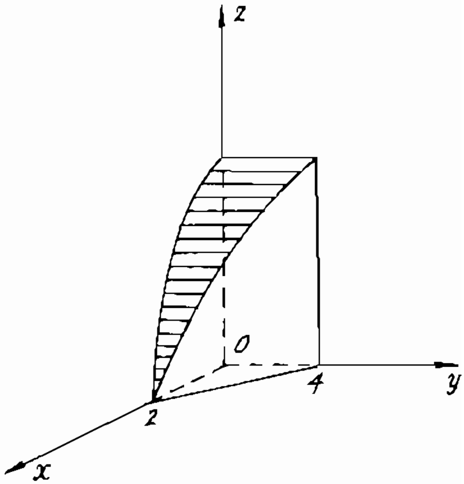
$$x = y = z = 0,\ z = 4 - x^2,\ 2x + y = 4\ (x \geq 0).$$

ở đây miền D là tam giác giới hạn bởi các đường:

$$x - y = 0,\ 2x + y = 4\ \text{(H.132, 133}$$



Hình 132



Hình 133

vậy $V = \iint\limits_D (4 - x^2)dS = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{4-2x} (4 - x^2)dy = \int\limits_0^2 (4 - x^2)(4 - 2x)dx$

$$= \int\limits_0^2 (2x^3 - 4x^2 - 8x + 16)dx = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} - 4x^2 + 16x \right)\Bigg|_0^2 = \frac{40}{3}$$

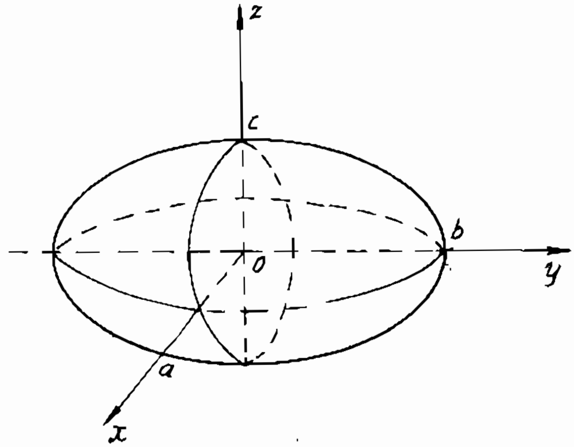
2) Tính thể tích V giới hạn bởi elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (H.134).}$$

Ta có:

$$z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \text{ vì lý do đối xứng ta có:}$$

$$V = 2c\iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$$



Hình 134

D là hình ellipse: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Chuyển sang tọa độ cực suy rộng: $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$

ta có $$|J| = abr$$

và:

$$V = 2c\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,abrdr$$

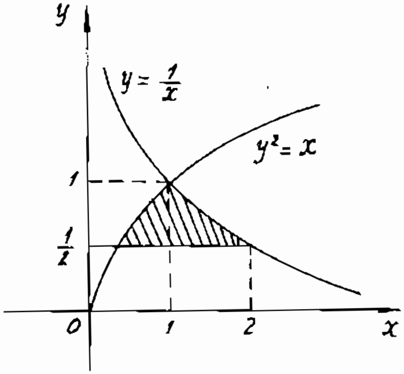
$$= 4\pi abc\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(\sqrt{1-r^2})^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\right) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

3) Tính diện tích S giới hạn bởi các đường:

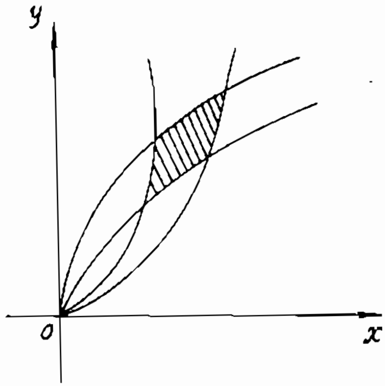
$$y^2 = x,\ y = \frac{1}{x},\quad y = \frac{1}{2}\ \text{(H.135)}$$

Theo (H.135) ta có:

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy\int_{y^2}^{\frac{1}{y}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{y}-y^2\right)dy = \left(\ln y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} = \ln 2 - \frac{7}{24}$$



Hình 135



Hình 136

4) Tính diện tích S giới hạn bởi các đường

$$y^2 = px,\ y^2 = qx,\ x^2 = ay,\ x^2 = by \text{ (H.136)}$$

$0 < p < q$, $0 < a < b$. Đổi biến số $\frac{y^2}{x} = u$, $\frac{x^2}{y} = v$ thì $p \le u \le q$, $a \leqslant v \leqslant b$, $x = \sqrt[3]{uv^2}$, $y = \sqrt[3]{u^2v}$ và Jacobien $J = -\frac{1}{3}$

Do đó:

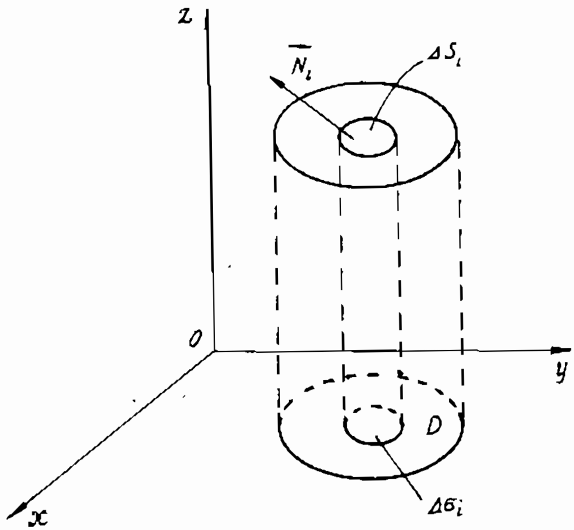
$$S = \iint_D dxdy = \int_p^q du \int_a^b \frac{1}{3} dv = \frac{1}{3}(q-p)(b-a).$$

5) Tính diện tích giới hạn bởi đường astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ ($0 \le t \le 2\pi$). Đổi biến số $x = r\cos^3 t$, $y = r\sin^3 t$, thì $0 \le r \le a$, $0 \le t \le 2\pi$. Ta có Jacobien: $J = 3r\sin^2 t.\cos^2 t$. Do đó và vì tính đối xứng ta có:

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^a 3r\sin^2 t\cos^2 t\,dr = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \sin^4 t)dt \int_0^a r\,dr = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

2) Diện tích mặt cong

Định nghĩa: ***Cho miền D là một miền compact trong R^2, $z = f(x, y)$ là một hàm có đạo hàm liên tục trên D, khi đó đồ thị của f là một mặt trơn S có phương trình $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ (H. 137).***



Hình 137

Xét một cách chia D thành n phần bất kỳ không dẫm lên nhau, gọi tên và diện tích của phần được chia thứ i là: $\Delta\sigma_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Xét điểm tuỳ ý $P_i(x_i, y_i) \in \Delta\sigma_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$. T_i là tiếp diện tại $M_i(x_i, y_i, f(x_i, y_i)) \in S$ và ΔS_i là phần của tiếp diện giới hạn bởi giao tuyến của tiếp diện với mặt trụ có đường chuẩn là biên của $\Delta\sigma_i$ và đường sinh song song với Oz, gọi diện tích của ΔS_i cũng là ΔS_i.

Giới hạn $$S = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \qquad (1)$$

với $d = \max d_i$, d_i là đường kính của $\Delta\sigma_i$ gọi là diện tích của mặt S (cũng gọi là S).

Cách tính: Theo lý thuyết hình chiếu thì: $\Delta\sigma_i = \Delta S_i \cos(\vec{N}_i, z)$, $\vec{N}_i$ là pháp tuyến của mặt S tại M_i.

Như đã biết

$$\vec{N}_i = \{f'_x(x_i, y_i), f'_y(x_i, y_i), -1\}$$

Do đó

$$\Delta\sigma_i = \Delta \mathbf{S}_i \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}}$$

hay

$$\Delta \mathbf{S}_i = \sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}\,\Delta\sigma_i$$

Vậy (1) viết được:

$$\mathbf{S} = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}\,\Delta\sigma_i$$

Theo định nghĩa tích phân kép thì tổng

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}\,\Delta\sigma_i$$

chính là tổng tích phân của hàm

$$\sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}$$

trên miền D. Theo giả thiết hàm này là liên tục trên D, nó khả tích trên D. Vậy

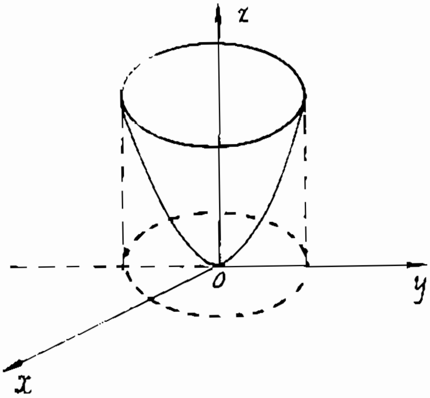
$$\mathbf{S} = \iint_D \sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}\,dxdy$$

Đó là công thức tính diện tích của mặt S.

Thí dụ: Tính diện tích mặt paraboloide tròn xoay $2z = x^2 + y^2$ gồm giữa các mặt phẳng $z = 0$ và $z = 2$. Ta thấy hình chiếu của phần mặt đó trên mặt phẳng Oxy là hình tròn:

$x^2 + y^2 \le 4$ (H.138)

(thay $z = 2$ trong $2z=x^2+y^2$)
ở đây $f'_x = x$, $f'_y = y$



Hình 138

Do đó diện tích S của phần mặt là:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy$$

Đổi sang tọa độ độc cực ta có:

$$S = \iint_D \sqrt{1+r^2}\, r d\varphi dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{1+r^2}\, r dr$$

$$= 2\pi \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1 + r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{2\pi}{3} (5\sqrt{5} - 1)$$

3.2. Áp dụng cơ học

1) Moment tĩnh, tọa độ trọng tâm của hình phẳng

Xét một hình phẳng D trong một mặt phẳng xOy có mật độ khối lượng (mặt) là $\gamma = \gamma(x, y)$.

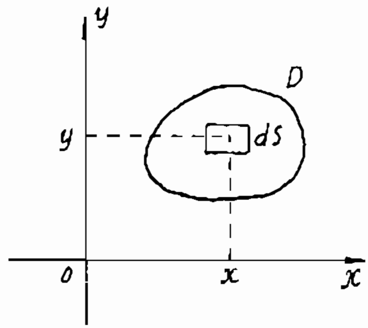
Xét một yếu tố vi phân dS của D chứa điểm $M(x, y)$ (H.139) và coi khối lượng của dS là $\gamma(x, y)dS$ thì theo cơ học moment tĩnh của dS đối với các trục Ox, Oy là: $y.\ \gamma(x, y).dS$. $x.\ \gamma(x, y).dS$ và moment tĩnh M_x, M_y của hình phẳng D đối với Ox, Oy là:

$$M_x = \iint_D y.\gamma(x, y)dS, \quad M_y = \iint_D x.\gamma(x, y)dS$$

Ta cũng biết khối lượng m của D là: $m = \iint\limits_D \gamma(x,y)dS$ và do đó theo định nghĩa tọa độ trọng tâm (x_0, y_0) của D là:

$$x_0 = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint\limits_D x.\gamma(x,y)dS}{\iint\limits_D \gamma(x,y)dS},$$

$$y_0 = \frac{\iint\limits_D y.\gamma(x,y)dS}{\iint\limits_D \gamma(x,y)dS}$$



Hình 139

2) Moment quán tính của hình phẳng

Dựa vào định nghĩa cơ học và lý luận tương tự như 1) ta có moment quán tính I_x, I_y của hình phẳng D đối với các trục Ox, Oy là:

$$I_x = \iint\limits_D y^2.\gamma(x,y)dS,$$

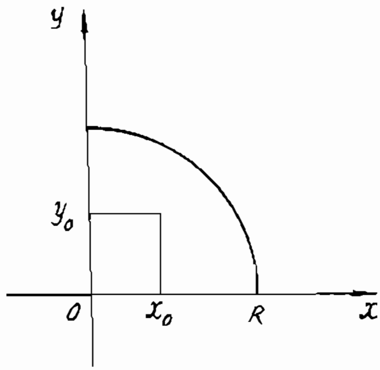
$$I_y = \iint\limits_D x^2.\gamma(x,y)dS$$

và moment quán tính I_0 của D đối với gốc O là:

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\gamma(x,y)dS$$

Thí dụ: Tìm M_x, M_y, x_0, y_0, I_x, I_y, I_0 của một phần tư hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$ ($x, y \ge 0$) đồng chất $\gamma = 1$, vì lý do đó đối xứng nên:

$$M_x = M_y,\ x_0 = y_0 \qquad (11.10)$$



Hình 140

Ta có:

$$M_x = \iint\limits_D ydS = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} ydy = \int_0^R \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^R (R^2 - x^2)dx \ \frac{1}{2}(R^2x - \frac{x^3}{3})\Bigg|_0^R = \frac{1}{3}R^3$$

Theo nhận xét trên ta cũng có: $M_y = \dfrac{1}{3}R^3$ còn $m = \iint\limits_D dS = \dfrac{\pi R^2}{4}$,

do đó $$x_0 = y_0 = \frac{\frac{1}{3}R^3}{\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Bây giờ tính:

$$I_x = \iint\limits_D y^2 dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r^2 \sin^2 \varphi r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{4}.\frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{16}$$

Theo nhận xét trên ta cũng có $I_y = \dfrac{\pi R^4}{16}$, cuối cùng:

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r^2 r dr = \frac{\pi}{2}.\frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{8}$$

B. TÍCH PHÂN BỘI BA

§1. KHÁI NIỆM TỔNG QUÁT

1.1. Định nghĩa

- Cho hàm số u = f(x, y, z) xác định và bị chặn trong miền compact V.

- Chia V ra làm n phần bất kỳ không dẫm lên nhau, gọi tên và thể tích của chúng lần lượt là: $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_i, \ldots, \Delta V_n$

- Chọn $M_i(x_i, y_i, z_i) \subset \Delta V_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$

- Lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i$

- Gọi d_i *là đường kính của miền được chia thứ i* $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *và* $d = \max d_i$, *nếu* $I_n \to I$ *khi* $n \to \infty$ *sao cho* $d \to 0$, *không phụ thuộc cách chia miền V và cách chọn các điểm* M_i *thì I gọi là tích phân bội ba của hàm* $f(x, y, z)$ *trong miền V, kí hiệu:*

$$I = \iiint_V f(x, y, z)dV \quad hay \quad I = \iiint_V f(M)dV$$

Nếu f(x, y, z) có tích phân trong miền V thì ta nói nó khả tích trong miền đó. Người ta chứng minh rằng: Mọi hàm số liên tục trong miền compact V đều khả tích trong miền đó. Tích phân bội ba cũng có các tính chất tương tự như tích phân kép.

1.2. Ý nghĩa hình học và cơ học của tích phân bội ba

- Về hình học, tích phân bội ba nói chung không có ý nghĩa cụ thể, đặc biệt nếu $f(x, y, z) \equiv 1$ thì:

$$I = \iiint_V dV = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = V$$

là thể tích của miền V.

- Về cơ học, nếu coi $f(x, y, z)$ ($f(x, y, z) > 0$) là mật độ khối lượng (thể tích) của miền V thì khi ΔV_i khá nhỏ có thể coi khối lượng gần đúng của nó là $f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$, $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i$ và khối lượng gần đúng của cả miền V là:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$

Một cách lý tưởng ta định nghĩa khối lượng m của miền V là. $m = \lim_{d\to 0} I_n$.

Theo định nghĩa tích phân bội ba thì: $m = \iiint_V f(x,y,z)dV$.

Vậy về cơ học tích phân bội ba $\iiint_V f(x,y,z)dV$ là khối lượng của miền V nếu coi $f(x, y, z)$ là mật độ khối lượng của miền ($f(x, y, z) > 0$).

§2. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN BỘI BA

2.1. Tọa độ Descartes: Cho hàm $f(x, y, z)$ khả tích trong miền compact V và cần tính tích phân:

$$I = \iiint_V f(x,y,z)dV \tag{1}$$

- Nếu V là hình hộp $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, $e \le z \le g$ thì tương tự như tích phân kép ta có công thức tính tích phân bội ba (1):

$$I = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^g f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx = \int_a^b dx\int_c^d dy\int_e^g f(x,y,z)dz \tag{2}$$

Công thức (2) có thể viết dưới dạng:

$$I = \iint_{D_1} dxdy\int_e^g f(x,y,z)dz = \int_a^b dx\iint_{D_2} f(x,y,z)dydz \tag{2'}$$

trong đó D_1 (D_2) là hình chữ nhật $a \le x \le b$, $c \le y \le d$. ($c \le y \le d$, $e \le z \le g$), nó cũng là hình chiếu của miền V trên mặt phẳng Oxy (Oyz).

Bây giờ giả sử V là miền giới hạn bởi ;

- Các mặt phẳng $x = a$, $x = b$, ($a < b$).

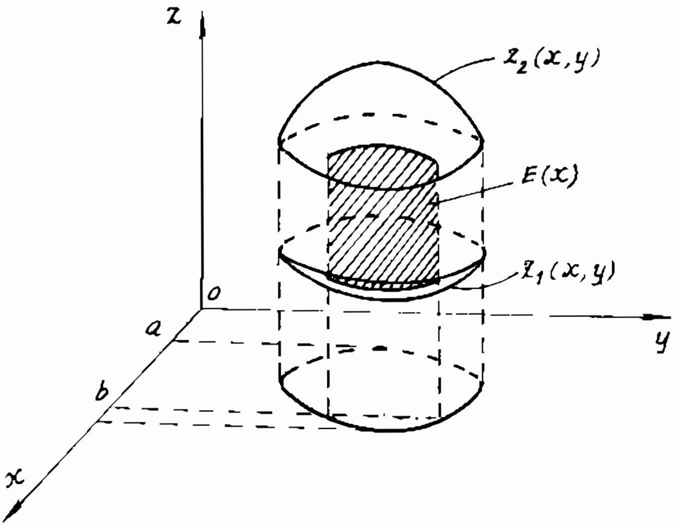
- Các mặt trụ $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ trong đó $y_1(x)$, $y_2(x)$ là các hàm liên tục và $y_1(x) \le y_2(x)$ trên $[a, b]$.

- Các mặt $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$ trong đó $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ là các hàm liên tục trong miền

$D = \{(x, y): a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$, $z_1 \le z_2$. Rõ ràng D là hình chiếu của miền V trên mặt phẳng Oxy. Miền V như trên cũng gọi là miền đơn giản trong không gian (H 141)

Tương tự như tích phân kép ta có công thức:

$$I = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz \right) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz \quad (3)$$



Hình 141

Công thức (3) có thể viết dưới dạng:

$$I = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz = \int_a^b dx \iint_{E(x)} f(x, y, z)\,dydz \quad (3')$$

trong đó D là hình chiếu của miền V trên mặt phẳng xOy, $E(x)$ là thiết diện của miền V và mặt phẳng $X = x$ (H.141) ($a \le x \le b$). Do các công thức (2) (2'), (3) (3') ta cũng ký hiệu:

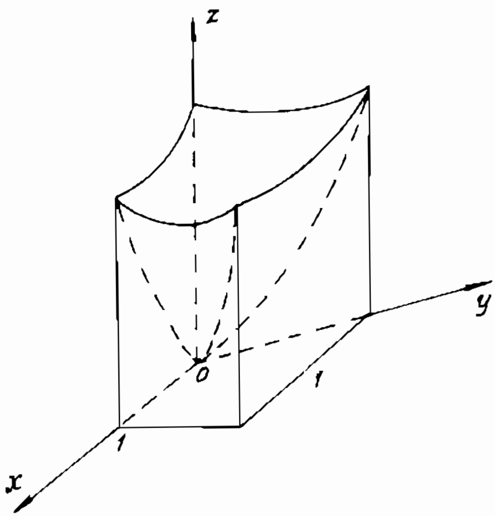
$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz$$

Thí dụ:

1) Tính $I = \iiint\limits_V xyzdxdydz$

V là miền giới hạn bởi các mặt:;

$$x = y = z = 0,\ x = 1,\ y = 1,\ z = x^2 + y^2 \quad \text{(H.142)}$$



Hình 142

Theo công thức (3) ta có:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} xyzdz = \int_0^1 dx \int_0^1 xy\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{x^2+y^2} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{2} xy(x^2 + y^2)^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 (x^5 y + 2x^3 y^3 + xy^5) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^5 (\frac{y^2}{2}) \Bigg|_0^1 + 2x^3 (\frac{y^4}{4}) \Bigg|_0^1 + x (\frac{y^6}{6}) \Bigg|_0^1 \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{x^5}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x}{6} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^6}{12} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{12} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{7}{48}$$

2) Tính $I = \iiint\limits_V z dx dy dz$

V là nửa trên của hình ellipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$

Hình chiếu của V trên mặt phẳng Oxy là ellipse:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$, vậy: $-a \le x \le a$

$$-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \le y \le \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \le z \le c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

Theo công thức (3) và tính toán ta có:

$$I = \int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} dy \int_0^{c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} z dz = \frac{\pi abc^2}{4}$$

Ta có thể dùng công thức (3') để tính I (đổi vai trò của x, z).

$$I = \int_0^c z.dz \iint\limits_{E(z)} dx dy$$

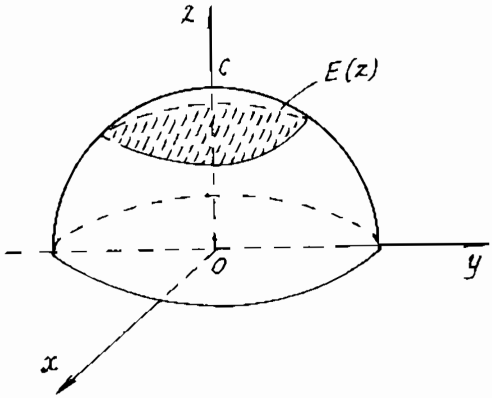
$E(z)$ là thiết diện của V và mặt phẳng $Z = z$, $0 \le z \le c$, (H.143), nghĩa là hình ellispe $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 - \frac{z^2}{c^2}$ hay

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}=1$$

Mặt khác $\iint\limits_{E(z)} dxdy = S(z)$ là diện tích của hình ellipse đó:

$$S(z)=\pi ab\,(1-\frac{z^2}{c^2})\,.$$

Vậy
$$I=\pi ab\int_0^c z(1-\frac{z^2}{c^2})dz=\frac{\pi abc^2}{4}\,.$$



Hình 143

3) Tính $\quad I=\iiint\limits_V xdxdydz$

V giới hạn bởi: $x=0$, $y=0$, $z=0$

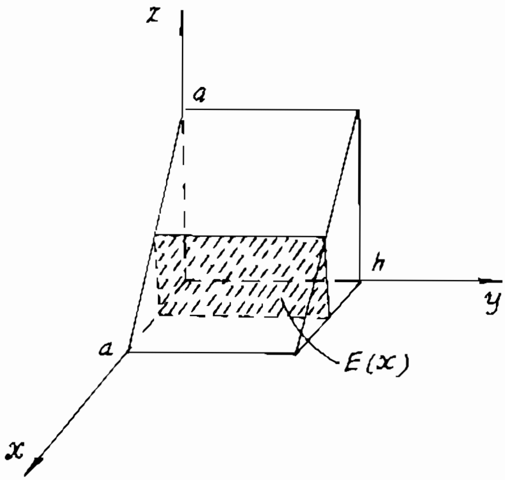
$$y=h,\ x+z=a\ \text{(H 144)}$$

Dùng (3') ta có:

$$I=\int_0^a x.dx\iint\limits_{E(x)} dxdy$$

$E(x)$ là hình chữ nhật cạnh h và $a - x$.

Vậy $$I = \int_0^a xh(a-x)dx = \frac{a^3h}{6}$$



Hình 144

2.2. Tọa độ cong – Quy tắc tổng quát đổi biến số

Tương tự như đối với tích phân kép ta có thể chứng minh

Định lý: (Quy tắc tổng quát đổi biến số trong tích phân bội ba).

Cho hàm $f(x, y, z)$ liên tục trong miền compact V, để tính tích phân : $I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$

Ta đặt $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ (1). Nếu

1) Các hàm (1) có các đạo hàm riêng liên tục trong miền compact V' của không gian $Ouvw$.

2) Các hàm (1) xác định một song ánh từ miền compact V' vào miền compact V của không gian Oxyz.

3) Định thức hàm Jacobi:

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

trong V' thì ta có công thức đổi biến số:

$$I = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{V'} f[x(u,v,w), y,(u,v,w), z(u,v,w)]\,|J|\,dudvdw \quad (2)$$

trong đó V là ảnh của V' qua ánh xạ (1) $\left(J = \frac{1}{\Delta},\ \Delta = \frac{D(4,v,w)}{D(x,y,z)}\right)$

Thí dụ:

$$I = \iiint_V dV$$

trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt phẳng:

$$a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3$$

với

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Đặt

$$\begin{aligned} u &= a_1x + b_1y + c_1z & & & -h_1 \le u \le h_1 \\ v &= a_2x + b_2y + c_2z & &\text{thì} & -h_2 \le v \le h_2 \\ w &= a_3x + b_3y + c_3z & & & -h_3 \le w \le h_3 \end{aligned}$$

Ta có:

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{\dfrac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}}$$

mà

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta \neq 0$$

Vậy $|J| = \dfrac{1}{|\Delta|}$ và theo công thức (2):

$$I = \frac{1}{|\Delta|} \int_{-h_1}^{h_1} du \int_{-h_2}^{h_2} dv \int_{-h_3}^{h_3} dw = \frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}$$

Chú ý rằng I chính là thể tích hình hộp giới hạn bởi các mặt phẳng đã cho.

Bây giờ ta sẽ xét vài trường hợp đặc biệt rất quan trọng trong lý thuyết và thực tế của hệ tọa độ *(u, v, w)* đã xét ở trên, đó là các hệ tọa độ trụ và cầu. Hệ tọa độ *(u, v, w)* cũng gọi là hệ tọa độ cong tổng quát.

a) Tọa độ trụ

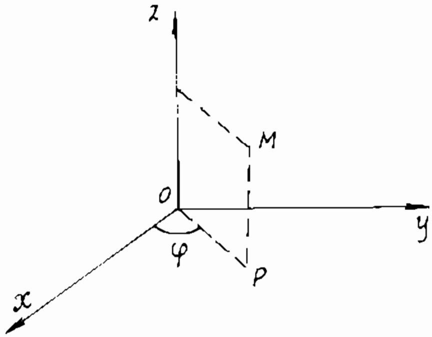
1) Định nghĩa: ***Cho điểm M(x, y, z) ∈ R³ hình chiếu của M trên mặt phẳng Oxy là điểm P(x, y) (H.145)***

Đặt

$\varphi = (Ox, \overrightarrow{OP}),\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$

$r = |\overrightarrow{OP}|,\ 0 \le r < +\infty$

$z = \overline{PM},\ -\infty < z < +\infty$



Hình 145

(r, φ, z) gọi là tọa độ trụ của điểm $M(r, \varphi, z)$. Theo định nghĩa thì (r, φ) là tọa độ cực của điểm P và z là cao độ của M trong tọa độ Descartes. Theo (H.145) ta có công thức liên hệ giữa toạ độ Descartes và tọa độ trụ của điểm M:

$$x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi;\ Z = z \qquad (3)$$

Các công thức này xác định một song ánh giữa hai hệ tọa độ Descartes và tọa độ trụ trừ các điểm trên Oz, có z xác định, $r = 0$, φ tuỳ ý.

Theo các công thức (3) thì các mặt phẳng r = const, φ = const, z = const, trong hệ $Or\varphi z$ lần lượt ứng với mặt trụ $x^2 + y^2 = r^2$, nửa mặt phẳng $y = x\operatorname{tg}\varphi$ (qua trục Oz), mặt phẳng $Z = z$ (mặt phẳng vuông góc với trục Oz) trong hệ $Oxyz$.

2) Tích phân bội ba trong tọa độ trụ

Ta sẽ chuyển tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$ sang tọa độ trụ như sau:

Theo công thức đổi biến số tổng quát (2) với $u = r$, $v = \varphi$, $w = z$ ta có:

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

và công thức chuyển tích phân bội ba từ tọa độ Descartes sang tọa độ trụ là:

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz \qquad (4)$$

Trong đó V' là miền trong tọa độ trụ ứng với miền V trong toạ độ Descartes qua ánh xạ (3).

Chú ý:

1) Theo định nghĩa ta có thể chuyển tích phân $I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dV$ sang tọa độ trụ như sau:

Ta có $f(x, y, z) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$, $dV = dxdydz$.

Ta biết: Chuyển sang tọa độ cực $dS = rdrd\varphi$. Vậy chuyển sang tọa độ trụ $dV = rdrd\varphi dz$ và $I = \iiint_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz$.

2) Tính tích phân bội ba trong tọa độ trụ cũng đưa về tính ba lần tích phân đơn.

Thí dụ:

1) Tính $I = \iiint_V x^2 + y^2 .dV$

V là miền giới hạn bởi paraboloide tròn xoay $z = x^2 + y^2$ và mặt phẳng $z = h$ ($h > 0$) chuyển sang tọa độ trụ: $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$ miền D (hình chiếu của V trên mặt phẳng xOy) là hình tròn $x^2 + y^2 = h$, mặt khác phương trình của mặt paraboloide trong tọa độ trụ là:

$$z = x^2 + y^2 = r^2.$$

Vậy $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le \sqrt{h}$, $r^2 \le z \le h$.

Theo (4):

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{h}} dr \int_{r^2}^{h} r^2 r dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{h}} r^3 dr \int_{r^2}^{h} dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{h}} r^3(h - r^2)dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{h}} (hr^3 - r^5)dr = 2\pi\left(\frac{r^4}{4}h - \frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{h}} = \pi\frac{h^3}{6}$$

2) Tính $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}.z.dV$

V là miền giới hạn bởi các mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = R$ Ta thấy V là hình nón, đỉnh tại O chiều cao R (H.1.16). Miền D là hình chiếu của V trên mặt phẳng Oxy là hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$ (thay $z = R$ trong phương trình $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = R$). Đổi sang tọa độ trụ, ta có:

$$\sqrt{x^2+y^2}\,z = rz,$$

$$z = \sqrt{x^2+y^2} = r$$

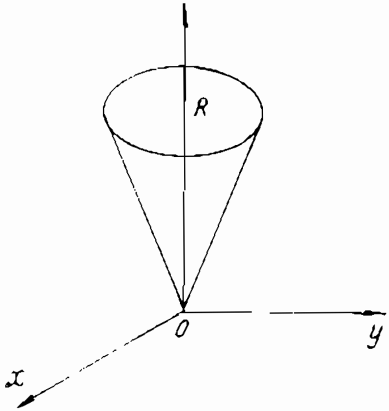
và V': $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le R$, $r \le z \le R$, do đó theo (4):

$$I = \iiint\limits_{V'} rzrdrd\varphi dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 dr \int_r^R zdz$$

$$= 2\pi \int_0^R r^2 \left.\frac{z^2}{2}\right|_r^R dr$$

$$= \pi \int_0^R (R^2r^2 - r^4)dr = \frac{2\pi R^5}{15}$$



Hình 146

b) Tọa độ cầu

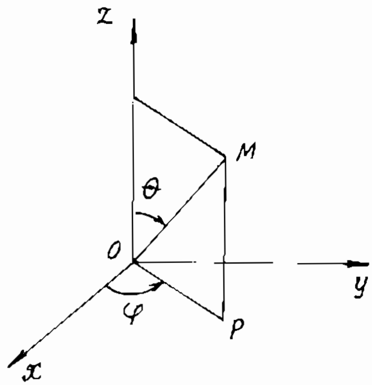
1) Định nghĩa: ***Cho điểm $M \in R^3$. Giả sử hình chiếu của M trên mặt phẳng xOy là điểm P (H. 147)***

Đặt

$$\varphi = (Ox, \overrightarrow{OP}), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\theta = (Oz, \overrightarrow{OM}), \quad 0 \le \theta \le \pi$$

$$\rho = |\overrightarrow{OM}|, \quad 0 \le \rho < +\infty$$



Hình 147

Bộ ba số (ρ, φ, θ) gọi là tọa độ cầu của điểm M, ký hiệu $M(\rho, \varphi, \theta)$. Từ (H. 147) ta có công thức liên hệ giữa tọa độ Descartes và tọa độ cầu của điểm M:

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta$$

$$y = \rho\sin\varphi\sin\theta \qquad (5)$$

$$z = \rho\cos\theta$$

Các công thức (5) xác định một song ánh giữa hệ tọa độ Descartes và hệ tọa độ cầu, trừ các điểm của *Oz* (ρ xác định, θ = 0, φ tùy ý, đặc biệt điểm *O*: (ρ =0, θ, φ tùy ý). Các mặt phẳng ρ = const, φ = const, θ = const, trong không gian *O*ρ φθ lần lượt ứng với: mặt cầu tâm *O* bán kính ρ, nửa mặt phẳng qua trục *Oz*, mặt nón tròn xoay đỉnh tại *O* và trục là trục *Oz* trong không gian *Oxyz*.

2) Tích phân bội ba trong tọa độ cầu

Theo công thức đổi biến số tổng quát (2), với: $u = \rho$, $v = \theta$, $w = \varphi$ thì

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ \rho\cos\varphi\cos\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta$$

và ta có công thức tính tích phân bội ba trong tọa độ cầu là:

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\varphi d\theta \quad (6)$$

Nếu dùng phép biến đổi biến số:

$$x = a\rho\cos\varphi\sin\theta,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$y = b\rho\sin\varphi\sin\theta,\ 0 \le \theta \le \pi \qquad (7)$$

$$z = c\rho\cos\theta,\ 0 \le \rho \le +\infty$$

(ρ, φ, θ) gọi là tọa độ cầu suy rộng, khi đó tính toán ta có:

$$|J| = abc\,\rho^2\sin\theta \qquad (8)$$

Thí dụ:

1) Tính $\quad I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$

V là $\frac{1}{8}$ thứ nhất của hình cầu (trong góc phần tám thứ nhất) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Đổi sang tọa độ cầu ta có:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta} = \rho$$

Vậy $I = \iiint\limits_{V'} \rho^2 \rho \sin\theta d\rho d\varphi d\theta$. Ta thấy khi $M(\rho, \varphi, \theta)$ về toàn bộ miền V thì:

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \ 0 \le \rho \le R.$$

Vậy:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2}(-\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{8}$$

2) Tính

$$I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2) dxdydz$$

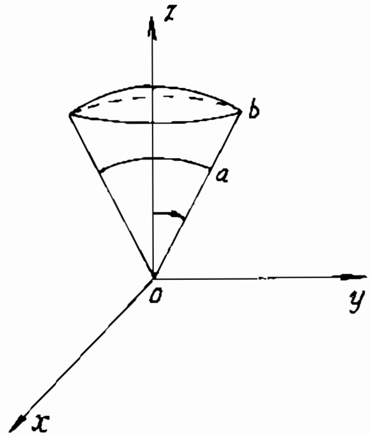
V là miền giới hạn bởi các mặt:

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

$x^2 + y^2 + z^2 = b^2$

$x^2 + y^2 = z^2$ ($z \ge 0$, $a < b$) (H.148)

Chuyển sang tọa độ cầu ta có:



Hình 148

$x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2\theta$

$0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, a \le \rho \le b$

Vậy: $$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta \int_a^b \rho^2 \sin^2\theta \rho^2 d\rho =$$

$$= 2\pi\left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\rho^5}{5}\right)\Bigg|_a^b = \frac{(8-5\sqrt{2})}{30}(b^5 - a^5)\pi$$

3) Tính: $$I = \iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz, \quad V: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$$

Chuyển sang tọa độ cầu suy rộng, theo công thức (7) ta có:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \rho^2 \text{ và } \rho^2 = 1$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \ 0 \le \theta \le \pi, \ 0 \le \rho \le 1$$

Theo (6) và (8) ta có:

$$I = abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^1 \rho^2\rho^2 d\rho = \frac{2\pi abc}{5}(\cos\theta)\Big|_\pi^0 = \frac{4}{5}\pi abc$$

§3. ÁP DỤNG CỦA TÍCH PHÂN BỘI BA

3.1. Áp dụng hình học

Ta biết thể tích V của miền V được tính theo công thức $V = \iiint\limits_V dV$. Như vậy ta có thể dùng tích phân bội ba để tính thể tích theo công thức này

Thí dụ: Tính thể tích V giới hạn bởi các mặt:

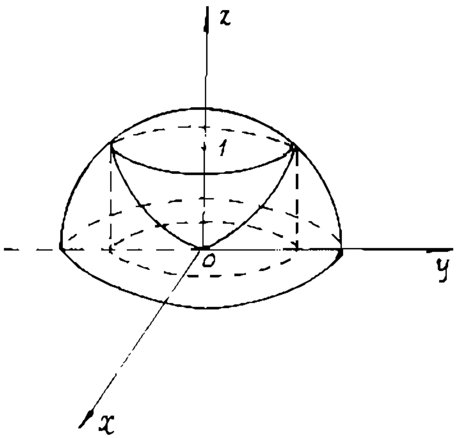
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \ x^2 + y^2 = 3z, \ z \ge 0$$

Đó là mặt cầu tâm O bán kính bằng 2 và mặt paraboloide tròn xoay đỉnh tại O (H 1.19). Ta sẽ chuyển sang tọa độ trụ để tính. Theo các công thức liên hệ:

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ thì các mặt trên, trong tọa độ trụ có phương trình là:

$$r^2 + z^2 = 4 \text{ hay } z = \sqrt{4 - r^2} \text{ (vì } z \geq 0)$$

$$r^2 = 3z \text{ hay } z = \frac{r^2}{3} \text{ (vì } z \geq 0)$$



Hình 149

Biên của miền D là hình chiếu của giao tuyến của hai mặt trên, Từ 4 $z^2 = 3z$ suy ra $z = 1$, nên biên của D là đường tròn: $x^2 + y^2 = 3$.

Do đó:

$$V = \iiint_V r\,dr\,d\varphi\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r\,dr \int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} dz =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4 - r^2}\,r - \frac{r^3}{3}\right)dr = -\pi\frac{2}{3}(4 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}} - 2\pi\frac{r^4}{12}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{17\pi}{6}$$

3.2. Áp dụng cơ học

1) Moment tĩnh và tọa độ trọng tâm của vật thể

Tương tự như đã tính đối với hình phẳng, ta có các công thức moment tĩnh của vật thể V: M_{xy}, M_{yz}, M_{zx} đối với các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx như sau:

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\gamma(x, y, z)dV; \; M_{yz} = \iiint\limits_V x\gamma(x, y, z)dV; \; M_{zx} = \iiint\limits_V y\gamma(x, y, z)dV$$

Trong đó $\gamma(x, y, z)$ là mật độ khối lượng của vật thể V còn tọa độ trọng tâm x_0, y_0, z_0 của vật thể V thì được xác định bởi các công thức:

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_0 = \frac{M_{zx}}{m}, \quad z_0 = \frac{M_{xy}}{m}$$

trong đó $m = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)dV$ là khối lượng của vật thể V. Sau cùng các moment tĩnh của vật thể: M_x, M_y, M_z đối với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz cho bởi các công thức:

$$M_x = \iiint\limits_V \sqrt{y^2 + z^2}.\gamma(x, y, z)dV$$

$$M_y = \iiint\limits_V \sqrt{z^2 + x^2}.\gamma(x, y, z)dV$$

$$M_z = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}.\gamma(x, y, z)dV$$

2) Moment quán tính của vật thể

Tương tự, ta có các moment quán tính I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} của vật thể V đối với các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx là:

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\gamma(x, y, z)dV; \; I_{yz} = \iiint\limits_V x^2\gamma(x, y, z)dV; \; I_{zx} = \iiint\limits_V y^2\gamma(x, y, z)dV$$

Các moment quán tính I_x, I_y, I_z của vật thể V đối với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz là:

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dV$$

$$I_y = \iiint\limits_V (z^2 + x^2)\gamma(x, y, z)dV$$

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z)dV$$

và moment quán tính I_0 của vật thể V đối với gốc O là:

$$I_0 = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dV$$

Thí dụ:

1) Tìm M_{xy}, M_{yz}, M_{zx} và tọa độ trọng tâm của bán kính cầu: $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $z \ge 0$ (H 150) đồng chất với $\gamma = 1$, vì bán cầu đồng chất, nên do tính đối xứng, trọng tâm phải ở trên Oz, nghĩa là $x_0 = y_0 = 0$ suy ra M_{yz}, $M_{zx} = 0$. Vậy ta chỉ còn tính M_{xy}

Ta có: $M_{xy} = \iiint\limits_V z dV$

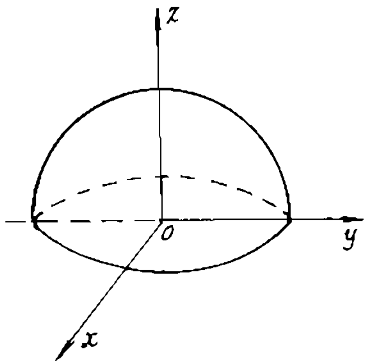
Đổi sang tọa độ cầu ta có:

$$M_{xy} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^R \rho\cos\theta\rho^2 d\rho =$$

$$= 2\pi \frac{1}{2}\frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{4}$$

Còn $m = \iiint\limits_V \gamma dV = \frac{2}{3}\pi R^3$.

Do đó $Z_0 = \dfrac{M_{xy}}{m} = \dfrac{\pi R^4}{4}\dfrac{3}{2\pi R^3} = \dfrac{3}{8}R$



Hình 150

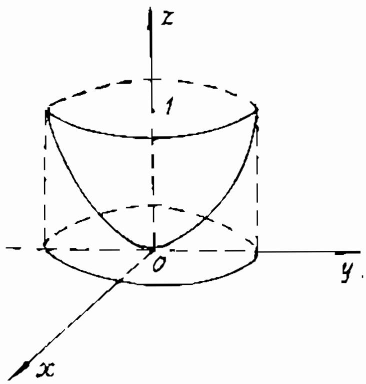
2) Tìm I_z của vật giới hạn bởi các mặt:

$$x^2 + y^2 = z,\ z = 1 \text{ với } \gamma = 1 \text{ (H.151)}$$

Ta có: $\quad I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)dV$

Đổi sang tọa độ trụ ta có:

$$I_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^1 r^3 dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^3 - r^5) dr = 2\pi \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$



Hình 151

C. TÍCH PHÂN BỘI SUY RỘNG

Trong phần này ta chỉ hạn chế nghiên cứu tích phân kép suy rộng, các kết quả có thể mở rộng cho trường hợp tích phân bội ba suy rộng.

§1. ĐỊNH NGHĨA

1.1. Miền lấy tích phân là vô hạn (không bị chặn)

Giả sử D là một miền vô hạn và f(x, y) là hàm khả tích trong mọi phần bị chặn (hữu hạn) G của D. Giả sử theo một quy tắc tuỳ ý miền G nở dần và choán toàn bộ miền D ký hiệu G → D. Khi đó giới hạn:

$$\lim_{G \to D} \iint_G f(x, y) dxdy$$

gọi là tích phân kép suy rộng của hàm f(x, y) trên miền vô hạn D.

Ký hiệu:

$$I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{G \to D} \iint\limits_G f(x,y)\,dxdy \qquad (1)$$

Nếu giới hạn (1) tồn tại (hữu hạn) thì tích phân suy rộng gọi là hội tụ. Ngược lại nếu giới hạn đó không tồn tại hoặc bằng vô cùng thì tích phân suy rộng gọi là phân kỳ. Xét đường cong C giới hạn miền $G \subset D$, C gọi là dần ra vô cùng nếu khoảng cách ngắn nhất R từ một điểm bất kỳ trên C đến gốc tọa độ dần ra vô cùng, khi đó mỗi điểm thuộc D sẽ thuộc G với R đủ lớn, nghĩa là G nở dần và choán toàn bộ miền D khi $R \to +\infty$

Định lý 1: ***Nếu $f(x, y) \geq 0$ thì điều kiện cần và đủ để tích phân suy rộng (1) hội tụ là giới hạn (1) tồn tại với một dãy đường dần ra vô cùng: $C_1, C_2,\ldots, C_n$. giới hạn các miền tương ứng: $G_1, G_2,\ldots G_n\ldots$***

Thực vậy, điều kiện cần là hiển nhiên, ngược lại xét đường cong bất kỳ C dần ra vô cùng, giới hạn miền $G \subset D$, rõ ràng với n đủ lớn ta có:

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_{G_n} f(x,y)dxdy \qquad (2)$$

Theo giả thiết $\lim\limits_{R_n \to +\infty} \iint\limits_{G_n} f(x,y)dxdy$ tồn tại

R_n là khoảng cách ngắn nhất từ một điểm bất kỳ trên C_n đến gốc tọa độ, do đó $\iint\limits_{G_n} f(x,y)dxdy$ là bị chặn, mặt khác nó là một đại lượng đơn điệu tăng khi R tăng vì $f(x, y) \geq 0$

Vậy $\lim\limits_{R_n \to +\infty} \iint\limits_G f(x,y)dxdy$ tồn tại

Xét tích phân suy rộng (1) tương tự như đối với tích phân đơn suy rộng, ta có:

Định lý 2: ***Nếu $\iint\limits_D |f(x, y)|\,dxdy$ hội tụ thì tích phân suy rộng (1) hội tụ, khi đó tích phân đó cũng gọi là hội tụ tuyệt đối. Trường hợp***

$\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$ phân kỳ, mà tích phân (1) hội tụ thì tích phân đó gọi là bán hội tụ hay hội tụ có điều kiện.

1.2. Hàm dưới dấu tích phân không bị chặn

Cho hàm $f(x, y)$ trên miền compact D, giả sử $f(x, y)$ không bị chặn tại lân cận điểm $P(x_0, y_0) \in D$ và khả tích trong miền $D\backslash G_\varepsilon = D_\varepsilon$ với mọi miền $G_\varepsilon \subset D$, chứa P và đường kính ε. Giới hạn:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{D_\varepsilon} f(x,y)dxdy \quad (\varepsilon \to 0: G_\varepsilon \text{ thu lại điểm } P)$$

gọi là tích phân suy rộng của hàm $f(x, y)$ trên D. Ký hiệu

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{D_\varepsilon} f(x,y)dxdy \qquad (1)$$

Nếu giới hạn (1) tồn tại (hữu hạn)thì tích phân suy rộng gọi là hội tụ, ngược lại nếu giới hạn đó không tồn tại hoặc bằng ∞ thì tích phân suy rộng gọi là phân kỳ.

Định lý:

Nếu $f(x, y) \geq 0$ thì tích phân suy rộng (1) là hội tụ khi và chỉ khi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{D_\varepsilon} f(x,y)dxdy \text{ tồn tại với } D_\varepsilon = D\backslash C_\varepsilon$$

C_ε là hình tròn bán kính $\frac{\varepsilon}{2}$ (H.1.2)

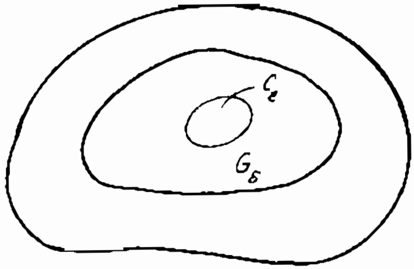
Thực vậy, điều kiện cần là hiển nhiên, ngược lại với mọi miền G_δ chứa P, $G_\delta \subset D$ tồn tại một hình tròn C_ε bán kính $\frac{\varepsilon}{2}$, $C_\varepsilon \subset G_\delta$ (chẳng hạn $\frac{\varepsilon}{2}$ là khoảng cách bé nhất từ một điểm bất kỳ trên biên của G_δ đến P).

Khi đó:

$$\iint\limits_{D_\delta} f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_{D_\varepsilon} f(x,y)dxdy$$

$$D_\delta = D\setminus G_\delta,\ D_\varepsilon = D \setminus C_\varepsilon \text{ vì } f(x) \geq 0$$

Theo giả thiết $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{D_\varepsilon} f(x,y)dxdy$ tồn tại, do đó suy ra sự tồn tại của vế trái khi $\delta \to 0$, vậy tích phân suy rộng hội tụ. Tương tự ta cũng có định lý và định nghĩa về sự hội tụ tuyệt đối của tích phân suy rộng với hàm dưới dấu tích phân không bị chặn như trường hợp tích phân suy rộng với miền vô hạn.



Hình 152

Chú ý: Nếu trong miền D, $f(x, y)$ không bị chặn tại lân cận một số hữu hạn điểm $P_1, P_2, \ldots, P_n$ thì ta định nghĩa tích phân suy rộng của f trên D là:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0 \\ \cdots \\ \varepsilon_n \to 0}} \iint\limits_{D_\varepsilon} f(x,y)dxdy\ ,\ D_\varepsilon = D\setminus \bigcup_{i=1}^{n} G_{\varepsilon_i}$$

$P_i \in G_{\varepsilon_i} \subset D$, ε_i là đường kính của G_{ε_i} $(i = 1, 2, \ldots n)$

§2 CÁCH TÍNH

Ta biết cách tính tích phân kép thông thường dẫn đến việc tính liên tiếp hai lần tích phân đơn. Đối với tích phân kép suy rộng hội tụ, ta cũng có thể tính nó bằng việc tính liên tiếp hai lần tích phân đơn, mà ít nhất một tích phân là suy rộng và ta cũng có thể thay đổi thứ tự lấy tích phân (định lý Fubini). Chẳng hạn miền D là góc phần tư thứ nhất thì:

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} f(x,y)dx$$

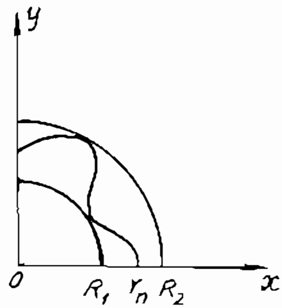
Thí dụ:

1) Tính $I = \iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy$

D là góc phần tư thứ nhất. Đầu tiên xét D là $\frac{1}{4}$ hình tròn bán kính R: D_R trong góc phần tư thứ nhất và $I_R = \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy$, chuyển sang tọa độ độc cực ta có:

$$I_R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^R e^{-r^2} rdr = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}(1 - e^{-R^2})$$

Bây giờ xét miền D_n giới hạn bởi đường Γ_n và các trục Ox, Oy, gọi R_1, R_2 là khoảng cách bé nhất và lớn nhất giữa biên Γ_n và gốc tọa độ trong góc phần tư thứ nhất (H.153)



Hình 153

Vì $e^{-x^2-y^2} > 0$, $\forall x, y \in R^2$ nên

$$I_{R_1} \le I_n = \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy \le I_{R_2}$$

Hay theo trên:

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R_1^2}) \le I_n = \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy \le \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R_2^2})$$

Khi R_1, $R_2 \to +\infty$ thì D_n dần tới góc phần tư thứ nhất và:

$$I = \iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy = \frac{\pi}{4} \qquad (1)$$

Mặt khác miền D là hình vuông: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$ thì:

$$I = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a dx \int_0^a e^{-x^2 - y^2} dy = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a e^{-x^2} dx \int_0^a e^{-y^2} dy = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

Theo định lý 1 ở §1 và theo (1) thì $\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{4}$

Do đó ta có giá trị của tích phân Euler-Poisson:

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2) Xét sự hội tụ của tích phân Cayley:

$$I = \iint_D \sin(x^2 + y^2) dxdy \tag{1}$$

D là góc phần tư thứ nhất.

Xét D_n giới hạn bởi các trục Ox, Oy, $x = n$, $y = n$ (H 154)

$$I_n = \iint_{D_n} \sin(x^2 + y^2) dxdy$$

$$= \iint_{D_n} (\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2) dxdy = 2\int_0^n \sin x^2 dx \int_0^n \cos y^2 dy$$

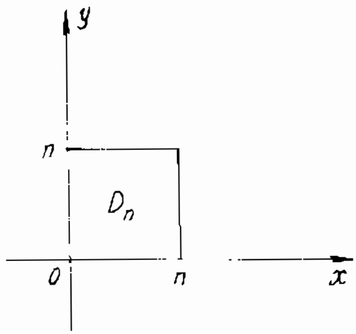
Ta biết:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \sin x^2 dx =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \cos y^2 dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$



Hình 154

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \dfrac{\pi}{4}$

Mặt khác, xét D_n là $\dfrac{1}{4}$ hình tròn bán kính n trong góc phần tư thứ nhất, chuyển sang tọa độ độc cực ta có:

$$I_n = \iint\limits_{D_n} \sin(x^2+y^2)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^n \sin r^2 r dr = \frac{\pi}{4}(1-\cos n^2)$$

Khi $n \to +\infty$, I_n không có giới hạn. Vậy với hai họ đường đã chọn, I_n có giới hạn hoặc không có giới hạn nghĩa là tích phân Cayley (1) phân kỳ.

Chú ý rằng, hàm dưới dấu tích phân ở đây là không giữ nguyên một dấu trong D.

3) Xét sự hội tụ của tích phân $I = \iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}}$

V là hình cầu: $x^2+y^2+z^2 \le 1$

ở đây, hàm dưới dấu tích phân không bị chặn tại $(0, 0, 0) \in V$.

Theo định nghĩa và định lý ở §1, 2, ta có:

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \iiint\limits_{V_\varepsilon} \frac{dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}} \quad ; \quad V_\varepsilon: \varepsilon^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 1$$

Chuyển sang tọa độ cầu, ta có:

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_\varepsilon^1 \rho^{-\alpha}\rho^2 d\rho = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\pi 2\left(\frac{1-\varepsilon^{3-\alpha}}{3-\alpha}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3-\alpha} & \text{nếu } \alpha < 3 \\ \infty & \text{nếu } \alpha > 3 \end{cases}$$

$\alpha = 3$, nguyên hàm của ρ^{2-3} là $\ln\rho \to \infty$ khi $\rho \to 0$. Vậy tích phân hội tụ khi $\alpha < 3$; phân kỳ khi $\alpha \ge 3$.

BÀI TẬP

1. Viết công thức tính tích phân $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$, với:

1) D là tam giác có các đỉnh (0, 0), (1, 0), (1, 1)

2) D là hình thang có các đỉnh (0, 0), (2, 0), (1, 1), (0, 1)

3) D là hình vành tròn $x^2 + y^2 \geq 1$, $x^2 + y^2 \leq 4$

4) D giới hạn bởi các đường $y^2 - x^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$ ($(0, 0) \in D$)

2. Thay đổi thứ tự lấy các tích phân

1) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy$

2) $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$

3) $\int\limits_{\frac{a}{2}}^a dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$

4) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$

5) $\int\limits_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$

6) $\int\limits_0^\pi dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy$

3. Tính các tích phân:

1) $I = \iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(x+y)^2}$, D: $3 \leq x \leq 4$, $1 \leq y \leq 2$

2) $I = \iint\limits_D \frac{x^2 dxdy}{1+y^2}$, D: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$

3) $I = \iint\limits_D (x^2 + y)dxdy$,

D giới hạn bởi $y^2 = x$, $y = x^2$

4) $I = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$,

D giới hạn bởi $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$

5) $I = \iint\limits_D \sqrt{4x^2 - y^2}\, dxdy$,

D là tam giác giới hạn bởi: $y = 0$, $x = 1$, $y = x$

*6) $I = \iint\limits_D x^{p-1} y^{q-1} dxdy$, $p, q \ge 1$, D: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 1$

7) $I = \iint\limits_D e^{\frac{x}{y}} dxdy$,

D giới hạn bởi $y^2 = x$, $x = 0$, $y = 1$

8) $I = \iint\limits_D xydxdy$,

D: $(x-2)^2 + y^2 \le 1$, $y \ge 0$

*9) $I = \iint\limits_D ydxdy$, D giới hạn bởi : $\begin{cases} x = R(t - \sin t) & 0 \le t \le 2\pi \\ y = R(1 - \cos t) & y \ge 0 \end{cases}$

*10) $I = \iint\limits_D xydxdy$, D giới hạn bởi : $\begin{cases} x = a\cos^3 t & 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ y = a\sin^3 t \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$

*11) $I = \iint\limits_D |\cos(x+y)|\, dxdy$, D: $0 \le x, y \le \pi$

*12) $I = \iint\limits_D \sqrt{|y - x^2|}dxdy$, D: $-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$

*13) $I = \iint\limits_D sign(x^2 - y^2 + 2)dxdy$, D: $x^2 + y^2 \le 4$

*14) $I = \iint\limits_D E(x + y)dxdy$, D: $0 \le x, y \le 2$

$E(x)$: phần nguyên của x.

*15) $I = \iint\limits_D x^K y^n dxdy$

K, $n \in$ N, ít nhất là một là lẻ D: $x^2 + y^2 \le a^2$

4. Tính các tích phân sau bằng cách chuyển sang tọa độ độc cực:

1) $I = \iint\limits_D ydxdy$,

D: nửa trên của hình tròn bán kính $\frac{a}{2}$, tâm $(\frac{a}{2}, 0)$

2) $I = \iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy$, D: $x^2 + y^2 \le a^2$, $y \ge 0$

3) $I = \iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy$,

D giới hạn bởi: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $x \ge 0$

4) $I = \iint\limits_D \sin\sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, D: $\pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2$

5) $I = \iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$, D: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$

*6) $I = \iint\limits_D dxdy$, D giới hạn bởi $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}$

7) $I = \iint\limits_D dxdy$, D giới hạn bởi $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$,

$(x, y > 0)$

5. Xác định dấu các tích phân:

1) $I = \iint\limits_D \ln(x^2 + y^2)dxdy$, D: $|x| + |y| \le 1$

2) $I = \iint\limits_D \arcsin(x + y)dxdy$, D: $0 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1 - x$

6. Tìm giá trị trung bình của:

1) $f(x, y) = \sin^2 x.\sin^2 y$ trong $0 \le x, y \le \pi$

2) $f(x, y) = x^2 + y^2$ trong $(x - a)^2 + (y - b)^2 \le R^2$

7. Tìm diện tích của các hình giới hạn bởi:

1) $y^2 = 4ax$, $x + y = 3a$

2) $(y - x)^2 + x^2 = 1$ (ellipse)

3) $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$

4) $r = a(1 + \cos\varphi)$, $r = a\cos\varphi$. $(a > 0)$

*5) $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$

*6) $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = \alpha$, $xy = \beta$ $(0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta)$

*7) $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$

*8) $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$

8. Tính thể tích của các hình giới hạn bởi:

1) $az = y^2$, $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$.

2) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$, $z = 0$

3) $x + y + z = a$, $3x + y = a$, $\dfrac{3}{2}x + y = a$, $y = 0$, $z = 0$

4) $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$

5) $2az \ge x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$

*6) $z = ae^{-(x^2+y^2)}$, $x^2 + y^2 = R^2$

7) $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, tính tỷ số của các thể tích.

8) $z = x + y$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$ $(x, y > 0)$

*9) $z^2 = xy$, $x^2 + y^2 = a^2$

10) $z = x + y$, $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, $z = 0$ $(x > 0, y > 0)$

11) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, $(z > 0)$

12) $z = xy$, $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = 2x$, $z = 0$

9. Tính diện tích:

1) Phần mặt $x^2 + y^2 = R^2$ $(z \ge 0)$ gồm giữa hai mặt phẳng: $z = mx$, $z = nx$ $(m > n > 0)$

2) Phần mặt $x^2 - y^2 = z^2$, giới hạn bởi mặt phẳng $y + z = a$ trong góc phần tám thứ nhất.

3) Phần mặt $x^2 + y^2 = 2ax$ gồm giữa mặt phẳng $z = 0$ và mặt $x^2 + y^2 = z^2$.

4) Phần mặt $x^2 - y^2 = z^2$ ở trong mặt $x^2 + y^2 = 2ax$.

*5) Phần mặt $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nằm ở phía ngoài các hình trụ $x^2 + y^2 = \pm ax$.

6) Phần mặt $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ở trong mặt trụ: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(b \le a)$.

7) Phần mặt $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ ở trong hình trụ:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

*8) Phần mặt giới hạn bởi $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$

*9) Phần mặt cầu bán kính R giới hạn bởi hai kinh tuyến và hai vĩ tuyến kề nhau.

10.

1) Tìm tọa độ trọng tâm của hình đồng chất ($\gamma = 1$) giới hạn bởi:

a) $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$.

b) $r = a(1 + \cos\varphi)$

2) Tìm moment quán tính của hình đồng chất ($\gamma = 1$) giới hạn bởi:

a) $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$ đối với Ox.

*b) $y^2 = ax$, $x = a$ đối với $y = -a$

c) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $y = 0$ đối với trục Ox,

$0 \le t \le 2\pi$.

11. Tính các tích phân bội ba:

1) $I = \iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(x + y + z + 1)^3}$

V giới hạn bởi $x = y = z = 0$, $x + y + z = 1$

2) $I = \iiint\limits_V (x + y + z)^2 dxdydz$

V là giao của: $2az \ge x^2 + y^2 + z^2 \le 3a^2$

3) $I = \iiint\limits_V zdxdydz$

V giới hạn bởi $z^2 = \dfrac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ và $z = h$

4) $I = \iiint\limits_V dxdydz$

V giới hạn bởi $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, $x^2 + y^2 = z^2$ và chứa $(0, 0, R)$

5) $I = \iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz$

V giới hạn bởi $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = 0$, $z = 0$, $z = a$

6) $I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz$

V là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

7) $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$

V là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le x$.

*8) $I = \iiint\limits_V xyzdxdydz$

V giới hạn bởi $z = x^2 + y^2$, $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$, $xy = a^2$,

$xy = b^2$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$, $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$

***12.**

1) Tìm giá trị trung bình của $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

trong miền $x^2 + y^2 + z^2 \le x + y + z$

2) Tính $F'(t)$ nếu $F(t) = \iiint\limits_V f(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$.

V: $x^2 + y^2 + z^2 \le t^2$, f là hàm liên tục.

3) Chứng minh rằng nếu hàm f liên tục trong miền compact V và $\iiint\limits_\Omega f(x, y, z)dxdydz = 0$ với miền bất kỳ $\Omega \subset V$ thì $f(x, y, z) = 0$, $\forall (x, y, z) \in V$

13. Tính thể tích hình giới hạn bởi các mặt:

1) $y^2 = 4a^2 \quad 3ax$, $y^2 = ax$, $z = \pm h$.

2) $x^2 + y^2 = 2ax,\ x^2 + y^2 = 2az,\ z = 0$

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 2,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \quad (z \geq 0)$

4) $z = x^2 + y^2,\ z = 2x^2 + 2y^2,\ y = x,\ y = x^2$

5) $az = x^2 + y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}$

6) $z = 6 - x^2 - y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}$

*7) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$

*8) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$

14.

1) Tìm tọa độ trọng tâm của hình đồng chất ($\gamma = 1$) giới hạn bởi:

a) $y^2 + 2z^2 = 4x,\ x = 2$

b) $z = x^2 + y^2,\ x + y = a,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

d) $x^2 + y^2 = a^2,\ y^2 + z^2 = a^2\ (y \geq 0)$

2) Tìm moment quán tính của hình đồng chất ($\gamma = 1$) giới hạn bởi các mặt sau, đối với các mặt phẳng tọa độ:

a) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2},\ z = c$

c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x}{a}$

*3) Hình cầu đồng chất $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ khối lượng M hút chất điểm $P(0, 0, a)$ khối lượng m bởi một lực bằng bao nhiêu?

***15.** Tính các tích phân suy rộng:

1) $\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x+y)} dy$

2) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{x^2 + y^2}$ D giới hạn bởi $x \geq 1$, $y \geq x^2$

3) $\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dy}{(x^2 + y^2 + a^2)^2}$ $(a > 0)$

4) $\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}$

***16.** Xét sự hội tụ của các tích phân

1) $\iint\limits_D \ln \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$, D: $x^2 + y^2 \leq 1$

2) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(x - y^2)^\alpha}$, D: $x^2 + y^2 \geq 1$

3) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt[3]{(x - y)^2}}$, D: $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$

4) $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}$ V: $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$

5) $\iint\limits_D \ln \sin(x - y) dxdy$.

D: giới hạn bởi $y = 0$, $x = \pi$, $y = \pi$.

TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP

1.

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x,y)dx$

2) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$

3) $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_1^1 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

$$+ \int\limits_1^1 dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$$

4) $\int\limits_3^{-2} dx \int\limits_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_2^3 dx \int\limits_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy$

2.

1) $\int\limits_0^{48} dy \int\limits_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)dx$

2) $\int\limits_0^{\frac{a}{2}} dy \int\limits_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$

3) $\int\limits_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} dy \int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} f(x,y)dx + \int\limits_{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{a} dy \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a} f(x,y)dx$

4) $\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f(x,y)dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dy$

5) $\int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx$

6) $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx$

3.

1) $\ln\frac{25}{24}$

2) $\frac{\pi}{12}$

3) $\frac{33}{140}$

4) $\frac{9}{4}$

5) $\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

6) $\frac{1}{q}B(p,q+1)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}$ (hàm Euler)

7) $\frac{1}{2}$

8) $\frac{4}{3}$

9) $\frac{5}{2}\pi R^3$; $\left(I=\int_0^{2\pi a} dx \int_0^{y(x)} y dy = \int_0^{2\pi} R(1-\cos t)dt \int_0^{R(1-\cos t)} y dy\right)$

10) $\frac{a^4}{80}$

11) 2π

$$\left(I = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y)dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi-x} \cos(x+y)dy - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_0^{\pi-x} \cos(x+y)dy\right) \right)$$

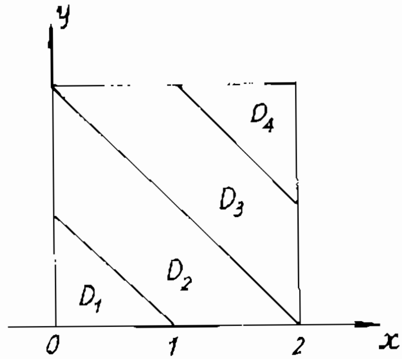
12) $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{5}{3}$; $\left(I = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y}\; dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{2} \sqrt{y - x^2}\; dy \right)$

13) $8 \ln \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \dfrac{4\pi}{3}$;

$$\left(I = 4\left(\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x^2+2}} dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy - \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy\right) \right)$$

14) 6; $\left(f = E(x+y) = K - 1 \quad (K = 1,2,3,4) \quad \text{nếu} \quad (x,y) \in D_K\right)$ (H 155)

15) 0; $\int_{a}^{a} x^K dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^n dy$



Hình 155

4.

1) $\dfrac{a^3}{12}$

2) $\dfrac{\pi a^3}{3}$

3) $\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{16(\sqrt{2}-20)}{9}\right)\dfrac{a^3}{2}$

4) $-6\pi^2$

5) $\dfrac{2}{3}\pi ab$

6) $ab\left[\left(\dfrac{a^2}{h^2} - \dfrac{b^2}{K^2}\right) arctg \dfrac{ak}{bh} + \dfrac{ab}{hK}\right]$;

$$\left(I = 4\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{aK}{bh}} d\varphi \int_0^{\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi + \frac{b^2}{K^2}\sin^2\varphi\right)^{-1/2}} abr\,dr \right)$$

7) $\ln 2$, đặt $xy = u$, $y = Vx$, $J = \dfrac{1}{2V}$

5.

1) ≤ 0

2) ≥ 0

6.

1) $f(x,\ y) = \dfrac{1}{4}$

2) $f(x,\ y) = a^2 + b^2 - \dfrac{R^2}{2}$

7.

1) $\dfrac{61}{3}a^2$

2) π; $-1 \le x \le 1$

3) $3\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\right)$

4) $\dfrac{5}{4}\pi a^2$

5) 10π, (đặt $x - 2y = u$, $3x + 4y = v$)

6) $\dfrac{1}{3}(\beta - \alpha)\ln\dfrac{b}{a}$

7) $\dfrac{5}{8}\pi a^2$

8) $\frac{3}{4}\pi a^2$

8.

1) $\frac{\pi r^4}{4a}$

2) $\frac{48\sqrt{6}}{5}$

3) $\frac{a^3}{18}$

4) $\frac{4}{3}\pi a^3(2\sqrt{2}-1)$

5) $\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3}-5)$

6) $\pi a(1-e^{-R^2})$

7) $\frac{3\sqrt{3}-2}{2}$

8) $\frac{\sqrt{2}}{2}(2\sqrt{2}-1)$ (đặt $xy = u$, $\frac{y}{x} = v$)

9) $\frac{4a^3\Gamma^2(\frac{3}{4})}{3\sqrt{\pi}}$ $\left(V = 4\iint\limits_D \sqrt{xy}\,dxdy = \frac{3}{4}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}}\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\varphi d\varphi\right)$

10) $\frac{\pi}{8}$

11) $\frac{\pi}{3}abc(2-\sqrt{2})$

12) $\frac{3}{4}$; (đặt $x^2 = uy$, $y^2 = Vx$)

9.

1) $2(m - n)R^2$

2) $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$, (tích phân theo mặt phẳng yOz)

3) $8a^2$

4) $3\pi a^2$

5) $8a^2$, $(0 \le x \le a,\ \sqrt{ax - x^2} \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}\ )$

6) $8a^2 \arcsin \frac{b}{a}$

7) $\frac{\pi a^2}{2}$

8) $16a^2$

9) $R^2(\varphi_2 - \varphi_1)(\sin\psi_2 - \sin\psi_1)$

φ_1, φ_2: kinh độ, ψ_1, ψ_2: vĩ độ

$(M \in S$: $x = R\cos\varphi\cos\psi$, $y = R\sin\varphi\sin\psi$, $z = R\sin\psi$

$\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, \psi_1 \le \psi \le \psi_2$

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv$$

$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2$; $G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2$; $F = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_v')$

10.

1)

a) $\left(\frac{2}{5}, 0\right)$

b) $\left(\frac{5}{6}a, 0\right)$

2)

a) $I_x = 4$

b) $\frac{8}{5}a^4$; $I = \int_0^a dx \int_{\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}} (y+a)^2 dy$

c) $\frac{35}{12}\pi a^4$, (lấy t và y là biến tích phân)

11.

1) $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$

2) $\frac{\pi a^5}{5}(18\sqrt{3} - \frac{97}{6})$

3) $\frac{\pi h^2 R^2}{4}$

4) πR^3

5) $\frac{8}{9}a^2$

6) $\frac{8}{15}\pi R^5$

7) $\frac{\pi}{10}$

8) $\frac{3}{64}(b^8 - a^8)[(\beta^2 - \alpha^2)(1 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}) + 4\ln\frac{\beta}{\alpha}]$

$(xy = u,\ y = vx,\ z = z)$

12.

1) $\frac{6}{5}$: $(f(M) = \frac{2}{\pi\sqrt{3}}\iiint_V f(x^2 + y^2 + z^2)dV$

$$V.\ (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-\frac{1}{2})^2 \le \frac{3}{4}$$

2) $F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$; $\left(F(t) = 4\pi\int_0^1 \rho^2 f(\rho^2)d\rho\right)$

3) $f(\overline{M}) = \dfrac{1}{\frac{4\pi\varepsilon^2}{3}}\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = 0$

$$(V: x^2+y^2+z^2 \le \varepsilon^2,\ \varepsilon \to 0, \quad \bar{M} \to M)$$

13.

1) $\dfrac{32}{6}a^2h$

2) $\dfrac{3}{4}\pi a^3$; $\left(V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r dr \int_0^{\frac{r^2}{2a}} dz\right)$

3) $\dfrac{4\pi}{3}(\sqrt{2}-1)abc$

4) $\dfrac{3}{35}$

5) $\dfrac{\pi a^3}{6}$

6) $\dfrac{32\pi}{3}$

7) $\dfrac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$; $(V = 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\sqrt{-\cos 2\varphi}} \rho^2 d\rho$: đặt $\frac{\pi}{2} - \varphi = t)$

8) $\dfrac{4\pi abc}{35}$; $(V = 72abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin^5\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho)$

14.

1)

a) $\left(\frac{4}{3},0,0\right)$

b) $\left(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a,\frac{7}{30}a^2\right)$

c) $\left(\frac{3}{8}a,\frac{3}{8}b,\frac{3}{8}c\right)$

d) $\left(0,0,\frac{3}{8}a\right)$

2)

a) $I_{xy}=\frac{abc^3}{60};I_{yz}=\frac{a^3bc}{60};I_{zx}=\frac{ab^3c}{60}$

b) $I_{xy}=\frac{\pi}{5}abc^3;I_{yz}=\frac{\pi}{20}a^3bc;I_{zx}=\frac{\pi}{20}ab^3c$

c) $I_{xy}=\frac{2abc^3}{225}(15\pi-16);$

$$I_{yz}=\frac{2a^3bc}{1575}(105\pi-92);I_{zx}=\frac{2ab^3c}{1575}(105\pi-272)$$

d) $\overrightarrow{F}(0,0,Z),Z=\begin{cases}-\dfrac{KmM}{a\,|a|} & \text{nếu } |a|\geq R\\ -\dfrac{KmMa}{R^5} & \text{nếu } |a|<R\end{cases}$

Theo định luật Newton: chất điểm có khối lượng m bị hút bởi một vật có khối lượng M bởi một lực $\overrightarrow{F}(X,Y,Z)$

$$X=Km\frac{\partial u}{\partial x};\quad Y=Km\frac{\partial u}{\partial y};\quad Z=Km\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$U(x,y,z)=\iiint_V \mu(\xi,\eta,\varsigma)\frac{d\xi d\eta d\varsigma}{r}$$

μ là mật độ khối lượng của vật.

$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\varsigma-z)^2}$, V là thể tích của vật

U gọi là thế vị Newton (thế của trường lực hút)

15.

1) 1

2) $\frac{\pi}{4}$

3) $\frac{\pi}{4a^2}$

4) $\frac{\pi}{8}$

16.

1) Hội tụ

Xét $I_\varepsilon=\iint_D \ln(x^2+y^2)dxdy \quad (D: x^2+y^2\le\varepsilon^2)$

$$=2\pi\left(\frac{\varepsilon^2}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2}\ln\varepsilon-\frac{1}{4}\right),\ \lim_{\varepsilon\to0}I_\varepsilon=-\frac{\pi}{2}$$

2) Hội tụ khi $\alpha>1$

3) Hội tụ

$$\left(I=\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^1 dx\int_0^{x-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}+\lim_{\delta\to0}\int_0^1 dx\int_{x+\delta}^1\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}\right)$$

4) Hội tụ khi $\alpha > \frac{2}{3}$

5) Hội tụ, $I = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$

$$I = \iint_D \ln\sin(x-y)dxdy, \text{ đặt } x = \frac{u+t}{2}, \quad y = \frac{u-t}{2}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\pi du \int_0^\pi \ln\sin t dt = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \ln\sin t dt = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$$

(phần tích phân suy rộng, tập I).

Chương 10

TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

§1. TÍCH PHÂN THƯỜNG PHỤ THUỘC THAM SỐ

1.1. Định nghĩa: *Cho tích phân* $I(x) = \int_a^b K(x,t)dt$ *(1) với* $K(x, t)$ *là một hàm bị chặn và khả tích theo t trên [a, b], tích phân (1) là một hàm số của x trong đoạn [c, d] nào đó, ta gọi tích phân đó: I(x) là tích phân phụ thuộc tham số x, ta xét sự liên tục khả vi và khả tích của I(x). Ta có:*

1.2. Định lý:

1) Nếu $K(x, t)$ *là một hàm liên tục trong hình chữ nhật D:* $a \le t \le b$, $c \le x \le d$ *thì:*

(1) I(x) là một hàm liên tục trong [c, d].

(2) I(x) là một hàm khả tích trên $[\alpha, \beta] \subset [c, d]$ *và*

$$\int_\alpha^\beta I(x)dx = \int_a^b dt \int_\alpha^\beta K(x,t)dx.$$

2) Với giả thiết ở 1) và nếu $\dfrac{\partial K(x,t)}{\partial x}$ *tồn tại và liên tục trong D thì*

$$(3) \qquad I'(x) = \int_a^b \frac{\partial K(x,t)}{\partial x} dt$$

Kết luận (2) gọi là qui tắc tích phân dưới dấu tích phân. (3) gọi là quy tắc lấy đạo hàm dưới dấu tích phân của Léibniz.

***Chứng minh:**

(1) Xét $I(x+\Delta x) - I(x) = \int_a^b [K(x+\Delta x, t) - K(x,t)]dt$

Theo giả thiết 1). $K(x, t)$ là liên tục đối với x trên $[c, d]$ theo định lý Cantor (hàm liên tục trên một đoạn) thì $K(x, t)$ là liên tục đều đối với x trên $[c, d]$ nghĩa là:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, |\Delta x| < \delta \Rightarrow |K(x+\Delta x, t) - K(x, t)| < \varepsilon$$

Do đó:

$$|\Delta I(x)| = |I(x+\Delta x) - I(x)| < \int_a^b \varepsilon dt = \varepsilon(b-a)$$

Điều này chứng tỏ $I(x)$ là hàm liên tục trên $[c, d]$

(2) Ta có:

$$\int_\alpha^\beta I(x)dx = \int_\alpha^\beta dx\int_a^b K(x,t)dt = \int_a^b dt\int_\alpha^\beta K(x,t)dx$$

(3)
$$\frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = \frac{I(x+\Delta x) - I(x)}{\Delta x} = \int_a^b \frac{K(x+\Delta x,t) - K(x,t)dt}{\Delta x}$$

Khi $\Delta x \to 0$ thì $\dfrac{K(x+\Delta x,t) - K(x,t)}{\Delta x} \to \dfrac{\partial K(x,t)}{\partial x}$ là một hàm liên tục trọng D theo giả thiết 2).

Do đó:

$$\left|\frac{\Delta I(x)}{\Delta x} - \int_a^b \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}dt\right| = \left|\int_a^b [\frac{K(x+\Delta x,t) - K(x,t)}{\Delta x} - \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}]dt\right| \quad \text{(a)}$$

Theo công thức Lagrange:

$$\frac{K(x+\Delta x,t) - K(x,t)}{\Delta x} = \frac{\partial K(c,t)}{\partial x}, c \in (x, x+\Delta x)$$

Cũng theo giả thiết 2) suy ra $\dfrac{\partial K(x,t)}{\partial x}$ là liên tục đều trên $[c, d]$. Do đó vế phải của (a) viết được:

$$\left|\int_a^b\left(\frac{\partial K(c,t)}{\partial x}-\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\right)dt\right| < \int_a^b \varepsilon dt = \varepsilon(b-a)$$

và vế trái của (a) < $\varepsilon(b - a)$, điều này chứng tỏ khi $\Delta x \to 0$:

$$I'(x) = \int_a^b \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}dt$$

Chú ý:

Nếu hàm $K(x, t)$ là liên tục trong hình chữ nhật $a \le t \le b$, $c \le x \le d$, $\forall d > c$ (c = const) thì ta cũng nói: $K(x, t)$ là liên tục trong hình chữ nhật $x \ge c$, $a \le t \le b$.

Thí dụ: Ta sẽ áp dụng định lý trên để tính một số tích phân

1) Tính $\quad I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $a \ne 0$, khi $n = 1$:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{1}{a} \qquad (1)$$

Coi I_1 là tích phân phụ thuộc tham số a: $I_1 = I(a)$, rõ ràng $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ và đạo hàm của nó liên tục trong miền $|a| \ge a_0 > 0$, $0 \le x \le 1$, theo (3):

$$\int_0^1 \frac{-2adx}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}arctg\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{a}\right)^2}\left(-\frac{1}{a^2}\right)$$

(Đạo hàm 2 vế của (1) theo a)

Do đó:

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}arctg\frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2(a^2+1)}$$

Tiếp tục, ta sẽ tính được $I_3, I_4, \ldots, I_n$

2) Tính $$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)dx \quad (a, b > 0) \qquad (1)$$

Rõ ràng hàm dưới dấu tích phân và đạo hàm theo a của nó liên tục trong miền $a \geq a_0 > 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Vậy theo quy tắc Leibniz:

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\sin^2 x dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$$

Đặt $t = \mathrm{cotg}x$ ta được:

$$I'(a) = 2a\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + b^2t^2)(1 + t^2)} = \frac{\pi}{a + b}$$

Do đó: $$I(a) = \pi\ln(a + b) + c \qquad (2)$$

Theo (1): $I(b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln b^2 dx = \pi\ln b$. Do đó trong (2) đặt $a = b$ ta có:

$I(b) = \pi \ln 2b + c = \pi \ln b$, hay $\pi(\ln 2 + \ln b) + c = \pi \ln b$,

vậy $c = -\pi \ln 2$, và $I(a) = \pi \ln \frac{a + b}{2}$

3) Tính

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx \quad (a, b > 0)$$

vì $$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$$

nên $$I = \int_0^1 dx\int_a^b x^y dy$$

Theo (2) của định lý:

$$I = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln\frac{(b+1)}{(a+1)}$$

Chú ý: Người ta cũng xét trường hợp các cận của tích phân cũng phụ thuộc tham số

$$I(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)dt \qquad (1)$$

Giả sử $K(x, t)$ là một hàm liên tục trong D: $a \le t \le b$, $c \le x \le d$; $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là các hàm khả vi trên $[c, d]$, $a \le \alpha(x) \le b$, $a \le \beta(x) \le b$ và $\dfrac{\partial K(x,t)}{\partial x}$ tồn tại và liên tục trong D thì (1) là khả vi trên $[c, d]$ và:

$$I'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial K(x,t)}{\partial x} dt + \beta'(x)K[x,\beta(x)] - \alpha'(x)K[x,\alpha(x)]$$

Thực vậy, áp dụng quy tắc Leibniz ở trên, quy tắc đạo hàm của hàm hợp và quy tắc đạo hàm của tích phân theo cận trên (dưới) ta sẽ có công thức này.

§2. TÍCH PHÂN SUY RỘNG PHỤ THUỘC THAM SỐ

2.1. Định nghĩa: ***Cho tích phân suy rộng:*** $I(x) = \int_a^b K(x,t)dt$ ***(1)***

với $b = +\infty$ ***hoặc*** $K(x, t)$ ***không liên tục theo*** t ***tại*** b. ***Nếu (1) hội tụ tại*** $x \in X \subset R$ ***thì nó là một hàm của*** x: $I = I(x)$, $I(x)$ ***gọi là tích phân suy rộng phụ thuộc tham số. Ta cũng có định lý về sự liên tục, khả vi, khả tích như đối với tích phân thường phụ thuộc tham số, nhưng phải có những điều kiện hạn chế hơn, cụ thể ta phải xét sự hội tụ đều của tích phân này.***

Sự hội tụ đều:

Tích phân $$I(x) = \int_a^{+\infty} K(x,t)dt \qquad (1)$$

gọi là hội tụ tại $x \in X$ nếu:

$$\lim_{b \to +\infty} I(x,b) = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b K(x,t)dt = I(x)$$

Nghĩa là $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, $\forall b > N \Rightarrow |I(x, b) - I(x)| < \varepsilon$. Nói chung N phụ thuộc ε và x, $N = N(x, \varepsilon)$. Nếu $\forall x \in X$, N chỉ phụ thuộc ε: $N = N(\varepsilon)$ thì (1) gọi là hội tụ đều trong miền X. ***Vậy tích phân (1) hội tụ đều trong X nếu:***

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) > 0,\ \forall b > N(\varepsilon),\ \forall x \in X \Rightarrow \left| \int_b^{+\infty} K(x,t)dt \right| < \varepsilon$$

Tương tự, tích phân $I(x) = \int_a^b K(x,t)dt$ ***với K(x, t) không liên tục tại b là hội tụ đều trong X nếu:***

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ |\alpha| < \delta(\varepsilon),\ \forall x \in X \Rightarrow \left| \int_{b-\alpha}^{b} K(x,t)dt \right| < \varepsilon$$

Để xét sự hội tụ đều của tích phân (1) ta có:

2.2. Tiêu chuẩn: ***Nếu tồn tại hàm φ(t) sao cho:***

1) $|K(x, t)| \le \varphi(t)$, ***∀x ∈ X và t trong khoảng lấy tích phân.***

2) $\int \varphi(t)dt$ ***tồn tại (tích phân trên [a, b] hoặc [a, +∞)) thì*** $\int K(x,t)dt$ ***hội tụ tuyệt đối và đều trong X.***

Thực vậy, chẳng hạn xét trường hợp $I(x) = \int_a^{+\infty} K(x,t)dt$ thì

$$\left| \int_b^{+\infty} K(x,t)dt \right| \le \int_b^{+\infty} \varphi(t)dt < \varepsilon \quad \text{theo giả thiết.}$$

2.3. Định lý:

1) Nếu $K(x, t)$ liên tục trong $D: a \le t < +\infty;\ c \le x \le d$ và $I(x) = \int_a^{+\infty} K(x,t)dt$ hội tụ đều $\forall x \in [c, d]$ thì $I(x)$ liên tục trong $[c, d]$.

2) Với những giả thiết của 1) và $[\alpha, \beta] \subset [c, d]$ thì:

$$\int_\alpha^\beta I(x)dx = \int_a^{+\infty} dt \int_\alpha^\beta K(x,t)dx\,.$$

3) Nếu $\dfrac{\partial K(x,t)}{\partial x}$ tồn tại và liên tục trong D

$\int_a^{+\infty} K(x,t)dt$ hội tụ $\forall x \in [c, d]$ và $\int_a^{+\infty} \dfrac{\partial K(x,t)}{\partial x}dt$ hội tụ đều trên $[c, d]$ thì:

$$I'(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}dt\,, \quad \forall x \subset [c, d].$$

Đối với trường hợp tích phân suy rộng:

$$I(x) = \int_a^b K(x,t)dt \quad \text{với } K(x, t) \text{ không liên tục tại } b.$$

Ta cũng có định lý tương tự với định lý trên (cần thay từ : $\forall t \ge a$ bằng $\forall t$: $a \le t \le b'$ với $b' < b$), định lý được chứng minh tương tự như định lý ở §1.

Thí dụ:

1) Tính $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}dx$ (tích phân Dirichlet, ta đã xét ở phần tích phân suy rộng, Tập 1)

Xét:

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin \alpha x}{x}dx \quad (\alpha \ge 0,\ k > 0)$$

Ta coi tích phân này như tích phân phụ thuộc tham số α:

$J = J(\alpha)$, có thể chứng minh $J(\alpha)$ thoả mãn các điều kiện của định lý.

Ta có: $J'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx}\cos\alpha x dx = \dfrac{k}{\alpha^2 + k^2}$ (đã tính ở Tập I)

($J'(\alpha)$ hội tụ đều với mọi α, vì $|e^{-kx}\cos\alpha x| \le e^{-kx}$ mà $\int\limits_0^{+\infty} e^{-kx}dx$ là hội tụ).

Vậy $\dfrac{dJ(\alpha)}{d\alpha} = \dfrac{k}{\alpha^2 + k^2}$.

Tích phân theo α ta có: $J(\alpha) = arctg\dfrac{\alpha}{k} + c$. Cho $\alpha = 0$, ta có $0 = 0 + c$, hay $c = 0$. Vậy $J(\alpha) = arctg\dfrac{\alpha}{k}$ với $k > 0$. Khi $\alpha = const$ thì J là hàm của k, liên tục khi $k = 0$, theo phần (1) của định lý.

$$\text{Đặt}\quad J_0 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}dx \;\; (\alpha > 0), \text{ thì } J_0 = \lim_{k\to +0} J(\alpha)$$

hay:
$$J_0 = \lim_{k\to +0} arctg\frac{\alpha}{k} = arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Đặc biệt $\alpha = 1$ thì $J_0 = I$

Vậy
$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

Chú ý: Từ trên suy ra: $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin ax}{x}dx = \dfrac{\pi}{2}\text{sign}a \;\; (a \neq 0)$

2) Tính

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}dt \quad (a, b > 0)$$

Ta có: $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ hội tụ đều $\forall x$: $x \ge x_0 > 0$.

Lấy tích phân đẳng thức này theo x từ a đến b ta có:

$$\int_0^{+\infty} dt \int_a^b e^{-xt} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a}$$

Vậy $\quad I = \ln \dfrac{b}{a}$

3) Tính

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t^2} dt \quad (a,\ b > 0).$$

Xét $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{t} dt = \frac{\pi}{2}$, $x > 0$ (thí dụ 1). Tích phân này hội tụ đều $\forall x$: $x \geq x_0 > 0$. Do đó

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} \int_a^b \sin xt dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}(b - a) = I$$

4) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ (tích phân Euler – Poisson)

Đặt $x = ut$, $u > 0$, ta có $I = u \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} dt$

Nhân hai vế với e^{-u^2} và lấy tích phân từ 0 đến $+\infty$:

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u du \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} dt = = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-u^2(1+t^2)} u du = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Do đó $\qquad I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

5) Tương tự, người ta cũng tính được các tích phân Laplace:

$$L_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ab} \quad (a,\ b > 0)$$

$$L_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin bx}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ab} \quad (a,\ b > 0)$$

Các tích phân Fresnel:

$$F = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

§3. HÀM EULER

3.1. Hàm Gamma Γ

Hàm Γ hay tích phân Euler loại 2 là tích phân, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (1)$

Như đã biết, tích phân này hội tụ $\forall\, x > 0$ (phần tích phân xác định suy rộng) .

Hàm Γ là một tích phân suy rộng phụ thuộc tham số x, nó là một hàm liên tục và có đạo hàm mọi cấp khi $x > 0$. Từ định nghĩa suy ra:

$$\Gamma(1) = 1 \tag{2}$$

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \tag{3}$$

$$\Gamma(n+1) = n!\ (n \in N) \tag{4}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{5}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!}\sqrt{\pi} \tag{6}$$

Thực vậy

(2): $\qquad \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt = -e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = 1$

(3): $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$, tích phân từng phần: $u = t^x$, $e^{-t}dt = dV$, ta có:

$$\Gamma(x+1) = -e^{-t} t^x\Big|_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$

(4): trường hợp đặc biệt của (3) $\Gamma(2) = 2\Gamma(1) = 2.1$

$$\Gamma(3) = 3.\,\Gamma(2) = 3.\ 2.1 = 3!, \ldots\ \Gamma(n+1) = n!$$

(5): xét (1), đặt $t = u^2$ thì:

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} u^{2x-1} e^{-u^2} du$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

(tích phân Poisson $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

(6): Theo (3)

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\ldots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$$

theo (5) và rút gọn ta có (6).

Chú ý: Người ta đã kéo dài $\Gamma(x)$ ra các giá trị âm của x:

$$\Gamma(-n-\frac{1}{2}) = (-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}n!}{(2n+1)!}\sqrt{\pi}$$

Chẳng hạn $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$, $\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$

3.2. Hàm Bêta B

Hàm Bêta B hay tích phân Euler loại 1, là tích phân suy rộng phụ thuộc các tham số p, q:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt \tag{7}$$

Tích phân này hội tụ $\forall p, q > 0$ (phần tích phân xác định suy rộng).

Đổi biến $t = 1 - u$ trong (7) ta có:

$$B(p, q) = B(q, p) \tag{8}$$

Hàm B liên tục và có đạo hàm mọi cấp theo p, q (trong miền $p, q > 0$).

3.3. Liên hệ giữa Γ và B

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{9}$$

*Thực vậy, xét $p,\ q \in N$

Tích phân từng phần (7), đặt $u=(1-t)^{q-1}$, $dV=t^{p-1}dt$, ta có:

$$B(p,q)=\left.\frac{t^p(1-t)^{q-1}}{p}\right|_0^1+\frac{q-1}{p}\int_0^1 t^p(1-t)^{q-2}dt=\frac{q-1}{p}B(p+1,q-1)$$

Từ công thức này suy ra:

$$B(p,q)=\frac{(q-1)(q-2)\ldots(q-(q-1))}{p(p+1)\ldots(p+q-2)}B(p+q-1,1)$$

$$=\frac{(q-1)!}{p(p+1)\ldots(p+q-2)}\int_0^1 t^{p+q-2}dt$$

$$=\frac{(q-1)!}{p(p+1)\ldots(p+q-2)(p+q-1)}=\frac{(q-1)!(p-1)!}{(p+q-1)!}$$

Do đó và theo (4) ta có

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Người ta cũng chứng minh được công thức (9) vẫn đúng trong trường hợp $p,\ q$ không nguyên (> 0)

Đặt $\beta=\frac{t}{1-t}$, ta có:

$$B(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{\beta^{p-1}}{(1+\beta)^{p+q}}d\beta \tag{10}$$

Đặc biệt

$q=1-p,\ 0<p<1$, người ta đã tính được:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{\beta^{p-1}}{(1+\beta)} d\beta = \frac{\pi}{\sin \pi p} \qquad (11)$$

([3], [13]) (xem chứng minh ở cuối tập BTGS GT II, III của tác giả)

3.4. Áp dụng

1) Tính $\quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \quad n \geq 0$

Đặt $\sin x = \sqrt{t}$, ta có:

$$I_n = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} B(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

Đặc biệt, $n \in N$, ta được kết quả đã biết

2) Tính $\quad I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)}$

Đặt $x^4 = \beta$, ta có $\quad I = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\beta^{-\frac{3}{4}}}{1+\beta} d\beta$

Theo (11) ta có $\quad I = \frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

3) Tính

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \qquad \text{(tích phân elliptique)}$$

Đặt $x^4 = t$, theo (5), (7), (9) ta có:

$$I = \frac{1}{4}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{4} B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}$$

Theo (11): $\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4}) = \dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2}$

Do đó $$I = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left[\Gamma(\frac{1}{4})\right]^2$$

Theo bảng (VII phụ chương)

$$\Gamma(\frac{1}{4} + 1) = 0,9064$$

Do đó

$$\Gamma(\frac{1}{4}) = 4\Gamma(\frac{1}{4} + 1) = 3,6256$$

và

$$I = 1,3110$$

BÀI TẬP

1. Tính $\Gamma(\alpha)$ nếu:

1) $I(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x + \alpha, x - \alpha)dx$

(f'_u, f'_v liên tục, $u = x + \alpha$, $v = x - \alpha$)

2) $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-\alpha y^2} dy$ $(\alpha > 0)$

***2.** Cho $f(z)$ liên tục $\forall z \in R$ và $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(z)|}{1 + z^2} dz$ hội tụ, chứng minh

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x.f(z).dz}{x^2+(y-z)^2}$$ thoả mãn phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ (Phương trình Laplace 2 chiều)

***3.** Cho phương trình (phương trình Bessel)

$$x^2J''_n(x)+xJ'_n(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0$$

Chứng minh:

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt-x\sin t)dt \quad \text{(hàm Bessel)}$$

là một nghiệm của phương trình đó.

4. Chứng minh rằng hàm:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)dz$$

thoả mãn phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a>0)$$

(phương trình dao động của dây) và các điều kiện ban đầu

$$u(x,\,0)=f(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=F(x)$$

với giả thiết $f(x)$ khả vi hai lần (có $f''(x)$) và $F(x)$ khả vi.

5.

1) Áp dụng công thức

$$\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{1}{n} \quad (n>0)$$

tính $$\int_0^1 x^{n-1}\ln x\,dx$$

2) Áp dụng công thức

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \frac{1}{p} \quad (p > 0)$$

tính $$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-pt}dt$$

Tính các tích phân (từ bài 6 đến bài 14).

6.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x}, \ (|a| < 1)$$

7.

$$\int_0^1 \frac{arctgx}{x} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

8.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}} dx, \ (|\alpha| < 1)$$

9.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx dx, \ (a, b > 0)$$

10.

$$\int_0^{+\infty} \frac{arctgax}{x(1 + x^2)} dx, \ (a > 0)$$

11.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \alpha x dx \ (a > 0)$$

12.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx \ (\alpha, \beta > 0)$$

13.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx \ (a > b > 0)$$

14.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx \quad (a > 0)$$

Biểu diễn qua các hàm Γ và B rồi tính các tích phân sau: (bài 15 đến bài 20).

15.

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}dx \ (a > 0)$$

16.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1 + x)^2} dx$$

17.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1 - x^n}} \ (n > 1)$$

18.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx$$

19.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1 + x} dx \ (0 < p < 1)$$

20.

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}} \text{ (tích phân elliptique loại 1)}$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}\, d\varphi \text{ (tích phân } n \text{ elliptique loại 2)}$$

HƯỚNG DẪN VÀ TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP

1.

1) $I(\alpha) = f(\alpha, -\alpha) + 2\int_0^{\alpha} f'_{\alpha} dx$

2) $I'(x) = -\int_{\alpha}^{+\infty} y^2 e^{-\alpha y^2} dy - e^{-\alpha^3}$

5.

1) $-\frac{1}{n^2}$

2) $\frac{2}{p^3}$, đạo hàm hai lần $\int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}$

6.

$\pi \arcsin a$, $I'(a) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - a^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$

$\Rightarrow J(a) = \pi \arcsin a + c$, $I(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ $(a < 1)$

7.

$$\frac{\pi}{2}\ln(1 + \sqrt{2})$$

dùng công thức: $\dfrac{arctgx}{x} = \int\limits_0^1 \dfrac{dy}{1 + x^2y^2}$, $x \neq 0$.

8. $\pi(\sqrt{1 - \alpha^2} - 1)$

9. $arctg\dfrac{b}{m} - arctg\dfrac{a}{m}$.

10. $\dfrac{\pi}{2}\ln(1 + a)$, $a > 0$

11.

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\alpha^2}{4a}},\quad I'(\alpha) = -\int\limits_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin\alpha x dx$$

$$= \frac{-\alpha}{2a}I(\alpha) \Rightarrow I(\alpha) = ce^{-\frac{\alpha^2}{4a}},\quad I(0) = \int\limits_0^{-\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = c$$

$$\Rightarrow I(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\alpha^2}{4a}}$$

12.

$$\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}\quad (\alpha > 0,\ \beta > 0),\quad I'(\alpha) = -\int\limits_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}dx = -\frac{1}{2\alpha}$$

$$\Rightarrow \qquad I(\alpha) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + c,\quad I(\beta) = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}\ln\beta$$

13. $\dfrac{\pi}{2}$

$I = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin(a + b)x}{x}dx + \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin(a - b)x}{x}dx$, dùng tích phân Dirichlet.

14. $\dfrac{\pi}{4}$, $\sin^3\alpha x = \dfrac{3}{4}\sin\alpha x - \dfrac{1}{4}\sin 3\alpha x$

15.

$\dfrac{\pi a^4}{16}$, đặt $x = a\sqrt{t}$ $(t > 0) \Rightarrow I = \dfrac{a^2}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1 - t)^{\frac{1}{2}}dt$

$$= B(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{a^4\Gamma^2(\frac{3}{2})}{2\Gamma(3)} = \frac{\pi a^4}{16}$$

16.

$$B(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(2)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

17.

$\dfrac{\pi}{n\sin\dfrac{\pi}{n}}$, đặt $x = t^{\frac{1}{n}}$ $(t > 0)$ ta dùng (10)

18.

$\dfrac{3\pi}{512}$, đặt $\sin x = \sqrt{t}$ $(t > 0)$

$$I = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(6)} = \frac{3\pi}{512}$$

19.

$-\dfrac{\pi^2 \cos p\pi}{\sin^2 p\pi}$ $\qquad 0 < p < 1,$

$$I(p) = \frac{d}{dp}\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{d}{dp}B(p, 1-p)$$

20.

$$K = \frac{1}{2\sqrt{2}}B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$$

$$K = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) + B(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})\right]$$

Chương 11

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ MẶT

A. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

Ta đã định nghĩa tích phân xác định là tích phân lấy trên một đoạn thẳng nào đó và cũng đã suy rộng: định nghĩa tích phân kép là tích phân lấy trên một miền nào đó. Bây giờ ta suy rộng theo một hướng khác: định nghĩa tích phân lấy theo một đường bất kỳ gọi là tích phân đường

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI MỘT

1.1. Định nghĩa

Cho hàm f(x, y) xác định trên đường C nối hai điểm A, B:

$$C = \overset{\frown}{AB}\ (\in R^2)\quad (H.156).$$

Chia C ra làm n phần bất kỳ (không dẫm lên nhau) bởi các điểm

$$A = A_1, A_2, \ldots A_i, \ldots A_n = B$$

Gọi tên và độ dài của phần được chia thứ i là: $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}} = \Delta s_i$ ***(i = 1, 2,...,n) lấy điểm tuỳ ý*** $M_i(x_i, y_i) \in \overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ ***(i = 1, 2,...,n) và lập tổng*** $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$. ***Nếu*** $I_n \to I$ ***khi*** $n \to \infty$ ***sao cho*** $\max \Delta s_i \to 0$ ***(không phụ thuộc vào cách chia đường C và cách chọn các điểm*** M_i***) thì I gọi***

là tích phân đường loại một của hàm f(x, y) lấy theo đường C hay trên đường C.

Ký hiệu:

$$I = \int_C f(x, y)ds = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds$$

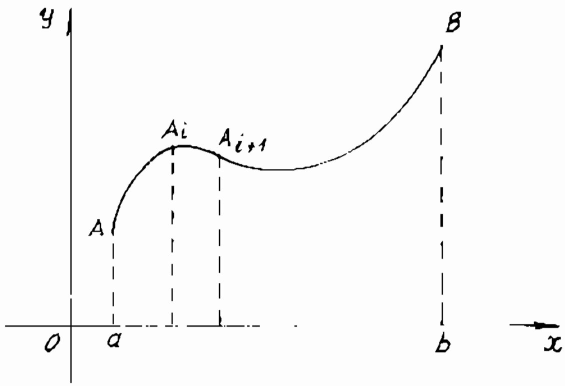
Nếu C là đường khép kín ($A \equiv B$) thì ký hiệu $\oint_C f(x, y)ds$.

Nếu C là đường trong không gian thì ta cũng định nghĩa tương tự:

$$I = \int_C f(x, y, z)ds$$

Đặc biệt nếu $f = 1$ thì

$$I = \int_C 1.ds = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = s \text{ là độ dài của đường } C.$$



Hình 156

Tích phân đường loại một cũng có tính chất giống như các tính chất của tích phân đơn, trừ tính chất đổi cận thì đối với tích phân đường đổi chiều đường lấy tích phân, tích phân vẫn không thay đổi.

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(x, y)ds$$

vì $$\overset{\frown}{A_iA_{i+1}} = \overset{\frown}{A_{i+1}A_i} = \Delta s_i > 0$$

1.2. Ý nghĩa cơ học

Xét $f(x, y) > 0$ và coi $f(x, y)$ là mật độ khối lượng (dài) của đường cong $\boldsymbol{C}$ và định nghĩa khối lượng m của đường cong là:

$$m = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$$

thì theo định nghĩa tích phân đường loại một ta có: $m = \int\limits_C f(x, y)ds$

1.3. Cách tính

Giả sử cần tính $$I = \int\limits_C f(x, y)ds \qquad (1)$$

Ta xét:

1) Đường $\boldsymbol{C}$ cho theo phương trình $y = y(x)$, $a \le x \le b$. Theo định nghĩa

$$I = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$$

Gọi hình chiếu của Δs_i trên trục Ox là Δx_i thì: $\Delta s_i \approx \sqrt{1 + y'^2(x_i)}\Delta x_i$ (Chương 8, phần A, §1.3, Tập I với Δx_i khá bé).

Do đó: $$I = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f[(x_i, y(x_i)]\sqrt{1 + y'^2(x_i)}\Delta x_i$$

Đây chính là tổng tích phân (đơn) của hàm $f[(x, y(x)]\sqrt{1 + y'^2(x)}$ trên đoạn $[a, b]$. Vậy

$$I = \int\limits_C f(x, y)ds = \int_a^b f[(x, y(x)]\sqrt{1 + y'^2(x)}dx \qquad (2)$$

2) Cho đường $\boldsymbol{C}$ theo phương trình tham số: $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ lý luận tương tự như 1), ta có công thức tính:

$$I = \int_C f(x, y)ds = \int_\alpha^\beta f[(x(t), y(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt \qquad (3)$$

3). Đường $C \subset R^3$, cho theo phương trình tham số:

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$. Cũng lý luận tương tự như 1), ta có công thức tính:

$$I = \int_C f(x, y, z)ds = \int_\alpha^\beta f[(x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt \quad (4)$$

Từ các công thức (2), (3) ta suy ra

Định lý: (Tồn tại của tích phân đường loại một).

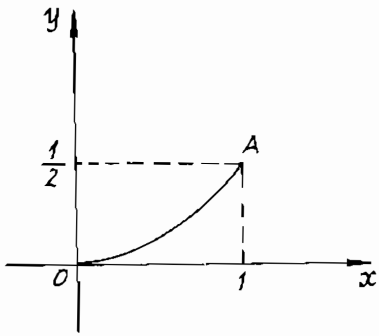
Nếu hàm f(x, y) là liên tục trên đường trơn từng phần C (chương 7, §1.8) thì tích phân đường loại một của hàm đó trên C là tồn tại.

Thực vậy, xét C là trơn: $y'(x)$ hay $x'(t)$, $y'(t)$ liên tục chúng khả tích Rieman trên $[a, b]$ và trên $[\alpha, \beta]$, nghĩa là các tích phân ở vế phải của (2), (3) tồn tại. Do đó tích phân (1) tồn tại.

Thí dụ:

1) Tính $\quad I = \int_C \frac{4y}{x} ds$

với C là cung parabole $y = \frac{x^2}{2}$ nối từ điểm (0, 0) đến $A(1, \frac{1}{2})$ (H. 157), ở đây $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \le x \le 1$, $ds = \sqrt{1 + x^2}dx$.



Hình 157

Theo (2) ta có:

$$I = \int_C \frac{4y}{x} ds = \int_0^1 \frac{2x^2}{x}\sqrt{1 + x^2}dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,d(1+x^2)$$

$$= \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

2) Tính $I = \int_C xyds$ với C là $\frac{1}{4}$ đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$ (x, $y \geq 0$).

Phương trình tham số của đường tròn $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ với $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$ds = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\,dt = Rdt$$

Theo (3) ta có:

$$I = \int_C xyds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \sin t\cos t dt = R^3\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^3}{2}$$

3) Tính

$$I = \int_C (x^2+y^2+z^2)ds\,,$$

C là phần đường đinh ốc $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

Theo công thức (4) ta có:

$$I = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)dt = \sqrt{a^2+b^2}\left(a^2t + \frac{b^2t^3}{3}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2 + \frac{4}{3}\pi^2b^2\right)$$

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

2.1. Định nghĩa: ***Cho hàm vecteur $\vec{F}$ của đối vô hướng $M(x, y)$: $\vec{F} = \vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j}$ xác định trên đường C nối hai điểm A, B:***

$C = \overset{\frown}{AB}$. $\vec{\tau} = \vec{\tau}(M) = \cos\alpha(M)\vec{i} + \sin\alpha(M)\vec{j}$ là vecteur tiếp tuyến với C tại M (α là góc giữa $\vec{\tau}$ và trục Ox). Tích phân đường loại một của hàm $f(x, y) = \vec{F}.\vec{\tau} = P(M)\cos\alpha(M) + Q(M)\sin\alpha(M)$ trên đường C:

$$I = \int_C \vec{F}.\vec{\tau}\, ds = \int_C [P(M)\cos\alpha(M) + Q(M)\sin\alpha(M)]ds$$

cũng được gọi là tích phân đường loại hai của hàm $\vec{F}(M)$ hay của các hàm P(M), Q(M) lấy trên đường C từ điểm A đến B.

Theo định nghĩa tích phân đường loại một thì:

$$I = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} I_n = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(M_i)\cos\alpha(M_i) + Q(M_i)\sin\alpha(M_i)]\Delta s_i$$

Coi như Δs_i như thẳng và gọi hình chiếu của nó trên các trục Ox, Oy lần lượt là Δx_i, Δy_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) thì theo định lý hình chiếu:

$$\cos\alpha(M_i)\Delta s_i = \Delta x_i, \quad \sin\alpha(M_i)\Delta s_i = \Delta y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

và $I_n = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i$. I_n cũng gọi là tổng tích phân (đường loại hai) thứ n của hàm $\vec{F}(M)$, hay của các hàm $P(M)$, $Q(M)$ trên đường $C = \overset{\frown}{AB}$ và tích phân đường loại hai của các hàm đó trên đường C từ điểm A đến điểm B ký hiệu là:

$$I = \int_C = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(M)dx + Q(M)dy = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Tích phân đường loại hai cũng gọi là tích phân đường theo tọa độ. Nếu đường C khép kín cũng ký hiệu: $\oint_C$

Tương tự, trong không gian, ta cũng định nghĩa tích phân đường loại hai của hàm vecteur $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$, $M(x, y, z) \in R^3$ hay của ba hàm $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ trên đường $C \subset R^3$ là :

$$I = \int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_C (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

với $\alpha = \alpha(x, y, z)$, $\beta = \beta(x, y, z)$, $\gamma = \gamma(x, y, z)$ là góc giữa tiếp tuyến $\vec{\tau}$ của C tại $M(x, y, z)$ với ba trục toạ độ Ox, Oy, Oz.

Tích phân đường loại hai có các tính chất giống như các tính chất của tích phân đơn (kể cả tính chất đổi chiều đường lấy tích phân: $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}}$ vì khi đổi chiều đường lấy tích phân thì Δx_i, Δy_i đổi dấu).

2.2. Ý nghĩa cơ học: Coi $P(x, y)$, $Q(x, y)$ là hình chiếu trên các trục Ox, Oy của lực $\vec{F}$ tác dụng vào chất điểm M chuyển động trên đường cong C từ điểm A đến điểm B (H.158).

Ta có :

$\vec{F} = \vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$.

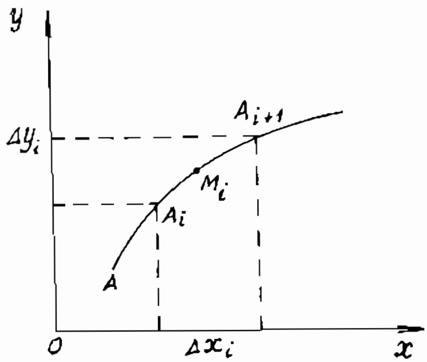
Coi cung $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ như dây cung $\overline{A_iA_{i+1}}$ thì:

$\overrightarrow{\Delta s_i} = \Delta x_i\vec{i} + \Delta y_i\vec{j}$ và coi trên cung đó:

$\vec{F} = \vec{F}(M_i) = P(M_i)\vec{i} + Q(M_i)\vec{j}$

$= P(x_i, y_i)\vec{i} + Q(x_i, y_i)\vec{j}$;

$M(x_i, y_i) \in A_iA_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.



Hình 158

thì công gần đúng của lực trên cung đó là:

$$\vec{F}(M_i)\overrightarrow{\Delta s_i} = P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i$$

và công gần đúng trên cả đường C là:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i$$

Người ta định nghĩa công T của lực trên đường C là:

$$T = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} T_n$$

Theo định nghĩa tích phân đường loại hai ta có:

$$T = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (1)$$

Như vậy về cơ học tích phân đường loại hai là công của lực trên đường cong C nếu coi lực là:

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

2.3. Cách tính

Dựa vào định nghĩa tích phân đường loại hai và tích phân đơn và lý luận tương tự như đối với tích phân đường loại một ta có:

1) Nếu đường C cho bởi phương trình $y = y(x)$ với $a \le x \le b$ thì công thức tính tích phân đường loại hai là:

$$I = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b \{P[x,y(x)] + Q[x,y(x)]y'\}dx \quad (1)$$

2) Nếu đường C cho bởi phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{ với } \quad \alpha \le t \le \beta$$

thì

$$I = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta \{P[x(t),y(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t)]y'(t)\}dt \quad (2)$$

3) $C \subset R^3 : x = x(t), y = y(t); z = z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$

Ta có công thức tính:

$$I = \int_C P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t) + R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt$$

(3)

Từ các công thức (1), (2) với lý luận tương tự như đối với tích phân đường loại một, ta có:

Định lý: (Tồn tại của tích phân đường loại hai)

Nếu các hàm P(x, y), Q(x, y) liên tục trên đường trơn từng phần C thì tích phân đường loại hai của các hàm đó trên C là tồn tại.

Thí dụ:

1) Tính $I = \int_C xydx + (y - x)dy$

với C là đường nối điểm (0, 0) đến điểm (1, 1) và có phương trình:

a) $y = x$; b) $y = x^2$; c) $y^2 = x$; d) $y = 0$ và $x = 1$ $(0 \le x \le 1)$ (H.159)

Trong các trường hợp ta có:

$0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Theo (1):

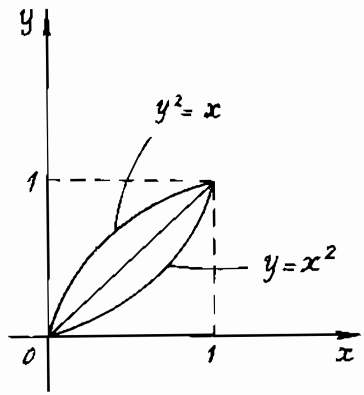
a) Thay $y = x$, $dy = dx$ vào tích phân ta có:

$$I = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$$

b) Thay $y = x^2$, $dy = 2xdx$ ta có:

$$I = \int_0^1 [x^3 + (x^2 - x)2x]dx =$$

$$= \left(\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right)\bigg|_0^1 = \frac{1}{12}$$



Hình 159

c) Thay $x = y^2$, $dx = 2ydy$ ta có:

$$I = \int_0^1 [y^3 2y + (y - y^2)]dy = \left(2\frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right)\bigg|_0^1 = \frac{17}{30}$$

d) Ở đây $I = \int\limits_C = \int\limits_{C_1} + \int\limits_{C2}$ trên C_1: $y = 0$; trên C_2: $x = 1$ do đó

$$\int\limits_{C_1} = 0, \quad \int\limits_{C2} = \int\limits_0^1 (y-1)dy = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $$I = -\frac{1}{2}$$

2) Tính $I = \int\limits_C 2xydx + x^2dy$

(C là đường như thí dụ 1)

Theo công thức (1) ta có:

a) $$I = \int\limits_0^1 (2x^2 + x^2)dx = \left.\frac{3x^3}{3}\right|_0^1 = 1$$

b) $$I = \int\limits_0^1 (2x^3 + 2x^3)dx = \left.\frac{4x^4}{4}\right|_0^1 = 1$$

c) $I = 1$ (Tính tương tự)

d) $I = 1$ (Tính tương tự)

3) Tính $I = \oint\limits_C xdx + (x+y)dy$

C là đường tròn $x = R\cos t$, $y = R\sin t$; $0 \le t \le 2\pi$ (theo ngược chiều kim đồng hồ).

Theo công thức (2) ta có:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} [R\cos t(-R\sin t) + (R\cos t + R\sin t)R\cos t]dt$$

$$= R^2\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 tdt = R^2\int\limits_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \left.\frac{R^2}{2}(t + \frac{\sin 2t}{2})\right|_0^{2\pi} = R^2\pi$$

4) Tính $I = \int\limits_C (x^2 + y^2)dx + 2xydy + z^2dz$

C là phần đường đinh ốc $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

Theo công thức (3) ta có:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)(-a\sin t) + 2a\cos t.a\sin t.a\cos t + b^3t^2]dt$$

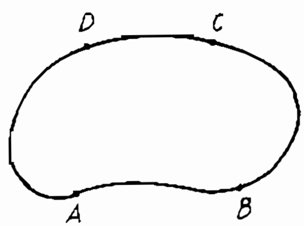
$$= \frac{1}{24}(b^3\pi^3 - 8a^3)$$

§3. CÔNG THỨC GREEN, SỰ ĐỘC LẬP CỦA TÍCH PHÂN ĐỐI VỚI ĐƯỜNG LẤY TÍCH PHÂN

3.1. Công thức Green: Cho miền D giới hạn bởi đường cong C khép kín. Đối với đường khép kín thì trị số của tích phân đường không phụ thuộc vào điểm bắt đầu. Thực vậy theo hình (H 160):

$$\oint\limits_C = \oint\limits_{ABCD} = \int\limits_{ABC} + \int\limits_{CDA} = \int\limits_{CDA} + \int\limits_{ABC} = \int\limits_{CDABC}$$

Bây giờ ta đưa ra một công thức liên hệ giữa tích phân đường và tích phân kép gọi là công thức Green cho bởi định lý sau đây:



Hình 160

Định lý: ***Nếu các hàm số P(x, y), Q(x, y) cùng với các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong miền compact D giới hạn bởi***

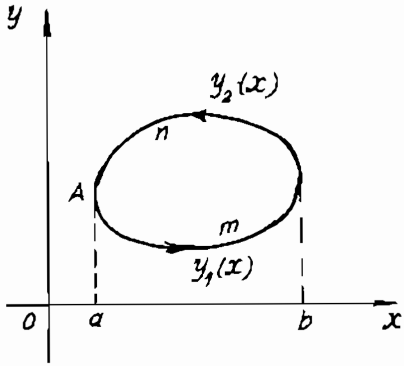
đường khép kín, trơn từng phần C thì:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

trong đó tích phân đường lấy theo chiều dương của C (Chương 7, §1.8).

Chứng minh:

a) Trường hợp D là miền đơn liên và các đường thẳng song song với Ox, Oy không cắt C quá hai điểm, nghĩa là D là miền đơn giản (H.161)



Hình 161

Giả sử đường C giới hạn miền D gồm hai phần AmB và AnB có phương trình $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ với $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y_2(x)$ (h.63). Xét:

$$I_1 = \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy$$

$$= \int_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \int_a^b P[x, y_2(x)]dx - \int_a^b P[x, y_1(x)]dx$$

Theo công thức tính tích phân đường loại hai thì:

$$I_1 = \int_{AnB} P(x,y)dx - \int_{AmB} P(x,y)dx$$

$$= -\int_{BnA} P(x,y)dx - \int_{AmB} P(x,y)dx$$

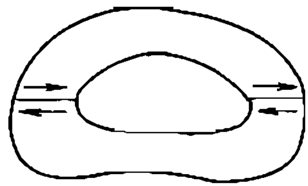
$$= -\oint_C P(x,y)dx \qquad (1)$$

Tương tự ta có:

$$I_2 = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint\limits_C Q(x, y)dy \qquad (2)$$

Lấy (2) trừ (1) ta có công thức Green.

b) Trường hợp D đa liên và có biên giới phức tạp, Ta sẽ chia D thành các miền đơn liên đơn giản, chẳng hạn D giới hạn bởi hai đường C_1, C_2 (H.162). Ta sẽ vẽ thêm hai đường phụ để chia D thành hai miền đơn liên đơn giản, áp dụng trường hợp a), ta phải lấy tích phân hai lần trên những đường phụ ấy, nhưng ngược chiều nhau, nên tích phân trên những đường ấy bằng không.



Hình 162

Kết quả là:

$$\oint\limits_C = \oint\limits_{C_1} + \oint\limits_{C_2} = \iint\limits_D$$, và công thức Green vẫn đúng.

Bây giờ ta xét một áp dụng trực tiếp của công thức Green là tính tích phân đường bằng cách chuyển sang tính tích phân kép.

Thí dụ: Tính $I = \oint\limits_C (1 - x^2)ydx + (1 + y^2)xdy$ với C là đường tròn :

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ theo chiều dương.}$$

Theo công thức Green, ở đây $P = (1 - x^2)y$, $Q = (1 + y^2)x$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 - x^2; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + y^2 \text{ do đó:}$$

$$I = \oint\limits_C (1 - x^2)ydx + (1 + y^2)xdy = \iint\limits_D (1 + y^2 - 1 + x^2)dxdy$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 r dr = 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

Nếu tính trực tiếp tích phân đường này thì phức tạp hơn nhiều.

3.2. Sự độc lập của tích phân đối với đường lấy tích phân

Xét tích phân $\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ với C là đường nối hai điểm A, B. Rõ ràng tích phân này phụ thuộc vào điểm đầu và cuối A, B của đường cong C.

Ở thí dụ 1) § 2 ta thấy I còn phụ thuộc vào đường lấy tích phân, nhưng ở thí dụ 2) thì I lại không phụ thuộc vào đường lấy tích phân.

Vậy trong trường hợp tổng quát, với điều kiện nào thì I độc lập đối với đường lấy tích phân và chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường.

Về cơ học, ta biết I là công của lực $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ trên đường C. Nếu I không phụ thuộc đường lấy tích phân tức là công không phụ thuộc vào đường đi.

a) Định lý: ***Nếu các hàm P(x, y), Q(x, y) và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền đơn liên D, thì bốn mệnh đề sau đây là tương đương.***

1) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\forall (x, y) \in D$.

2) $\oint_L Pdx + Qdy = 0 \quad \forall L \subset D$ ***(L: khép kín)***

3) $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ ***không phụ thuộc đường nối các điểm .***

$A, B \in D$.

4) Pdx + Qdy là một vi phân toàn phần của một hàm u(x, y) nào đó trong miền D (du = Pdx + Qdy).

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh định lý theo sơ đồ: 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 4) ⇒ 1)

1) $\Rightarrow$ 2). Xét một đường khép kín bất kỳ $L \subset D$, L là biên của miền $D_1 \subset D$. Áp dụng công thức Green cho D_1.

Ta có : $\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_{D_1} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$, theo 1) thì :

$$\iint\limits_{D_1} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = 0$$

do đó $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$ với mọi đường khép kín $L \subset D$

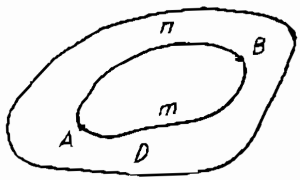
2) $\Rightarrow$ 3). Xét đường khép kín $L \subset D$, L gồm hai phần AmB và AnB (H 163)

Theo 2):

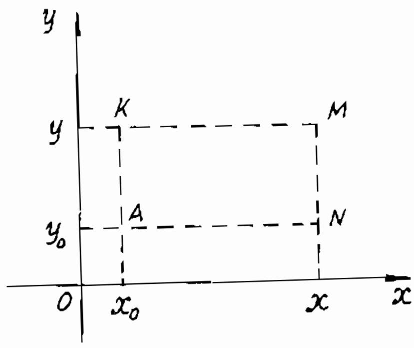
$\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$ hay $\int\limits_{AmB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BnA} Pdx + Qdy = 0$

Do đó: $\int\limits_{AmB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AnB} Pdx + Qdy$

nghĩa là tích phân $\oint\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc đường nối các điểm A, B.



Hình 163



Hình 164

3) ⇒ 4). Xét $A(x_0, y_0) = \text{const} \in D$. $M(x, y) \in D$.

Theo 3) tích phân $\oint\limits_{\overset{\frown}{AM}} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc đường nối A, M, nghĩa là $\oint\limits_{\overset{\frown}{AM}} Pdx + Qdy = u(x, y)$ trong D. Ta chọn đường nối A, M là các đoạn AN, NM (H.164).

Ta có: Trên AN: $y = y_0$, $dy = 0$.

Trên NM: $x = \text{const}$, $dx = 0$.

do đó:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy + C \qquad (1)$$

Nếu chọn đường nối AM là các đoạn AK và KM thì lý luận tương tự ta có:

$$u(x, y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + C \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$$

Vậy

$$du = \frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \qquad (3)$$

Công thức (3) chứng tỏ $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x, y)$ xác định bởi (1) hoặc (2).

4) ⇒ 1). Theo (4) $P = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Theo giả thiết $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ liên tục trong D nên:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y) \in D.$$

Chú ý:

1) Nếu D là miền đa liên thì định lý trên không còn đúng nữa.

Chẳng hạn xét

$$I = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

C là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$, giới hạn miền D là hình tròn $x^2 + y^2 \leq R^2$ trừ gốc O. Ở đây

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$(x^2 + y^2 \neq 0)$.

Nhưng tính trực tiếp, ta có phương trình tham số của C là: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{R\cos t.R\cos t - R\sin t(-R\sin t)}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

Kết quả này do hình tròn $x^2 + y^2 \leq R^2$, bỏ đi điểm O là một miền đa liên.

b) Tính tích phân đường bằng nguyên hàm

Theo định lý nếu $du = Pdx + Qdy$ ($(x,y) \in D$ đơn liên) thì ta tìm được hàm $u(x, y)$ xác định bởi các công thức (1) hoặc (2).

Bây giờ xét $I = \oint_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$, $A(x_0, y_0)$, $B(x,y) \in D$

Trong đó C là một đường bất kỳ nối A, B giả sử phương trình của C là

$x = x(t),\ y = y(t);\ t_0 \le t \le t_1;\ C \subset D$ và $x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0,\ x(t_1) = x_1,$ $y(t_1) = y_1$ vì $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P,\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q$ nên theo cách tính tích phân đường ta có:

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial u[x(t), y(t)]}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial u[x(t), y(t)]}{\partial y} y'(t) \right\} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\{u[(x(t), y(t)]\}dt = u[x(t), y(x)]\Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$= u[x(t_1), y(t_1)] - u[x(t_0), y(t_0)] = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0)$$

Do đó người ta cũng gọi u là một nguyên hàm của $Pdx + Qdy$ và cũng ký hiệu:

$$I = \oint\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy =$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} du = u(x, y)\Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0) \qquad (1)$$

Thí dụ:

Tính $I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (4x^3y^3 - 3y^2 + 5)dx + (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy$

Ta có : $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 12x^3y^2 - 6y$, vậy biểu thức dưới dấu tích phân là một vi phân toàn phần

Theo công thức (1), ta có một nguyên hàm của biểu thức đó với $x_0 = y_0 = 0$

$$u(x, y) = \int_0^x 5dx + \int_0^y (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy + C = 5x + x^4y^3 - 3xy^2 - 4y + C .$$

Theo công thức (1) ta có:

$$I = u(x, y)\Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = (5x + x^4y^3 - 3xy^2 - 4y)\Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = -1$$

c) Tích phân không phụ thuộc đường lấy tích phân trong không gian R^3

Đối với tích phân đường trong không gian

$$I = \int_{C = \overset{\frown}{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \qquad (1)$$

Ta có thể chứng minh một định lý tương tự như định lý đã xét ở a). Đặc biệt ta có thể phát biểu: Nếu các hàm P, Q, R và các đạo hàm riêng cấp một của chung liên tục trong miền đơn liên V thì điều kiện cần và đủ để tích phân (1) không phụ thuộc đường lấy tích phân $C = AB \subset V$ hay $Pdx + Qdy + Rdz$ là vi phân toàn phần của một hàm $u(x, y, z)$ trong V là:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad (2)$$

hay viết dưới dạng hình thức:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z)}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\vec{k} = 0$$

Trong trường hợp này ta cũng có công thức để tìm u tương tự như công thức (1) ở a)

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz + C \qquad (3)$$

với $A(x_0, y_0, z_0) = \text{const} \in V$, $M(x, y, z) \in V$

Thí dụ: Chứng tỏ rằng biểu thức:

$$z\left(\frac{1}{x^2 y} - \frac{1}{x^2 + z^2}\right)dx + \frac{z}{x^2 y}dy + \left(\frac{1}{x^2 + z^2} - \frac{1}{xy}\right)dz$$

là vi phân toàn phần của một hàm $u(x, y, z)$ nào đó trong miền bất kỳ V không cắt các mặt phẳng $x = 0$, $y = 0$ và tìm hàm $u(x, y, z)$, ta có.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{z}{x^2y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{xy^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{1}{x^2y} + \frac{z^2 - x^2}{(x^2 + z^2)^2}$$

Vậy biểu thức trên là vi phân toàn phần của một hàm $u(x, y, z) \in V$. Theo công thức (3) ta có với $z_0 = 0$, $x_0, y_0 \neq 0$

$$u(x, y, z) = \int_0^z \left(\frac{x}{x^2 + z^2} - \frac{1}{xy} \right) dz + C = arctg\,\frac{z}{x} - \frac{z}{xy} + C$$

§4. ÁP DỤNG CỦA TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

4.1. Moment tĩnh, tọa độ trọng tâm, moment quán tính của đường cong

Trong bài tích phân xác định, ta đã tính các moment tĩnh M_x, M_y, các moment quán tính I_x, I_y, I_0 đối với các trục Ox, Oy và điểm gốc, tọa độ trọng tâm x_0, y_0 của đường cong đồng chất (có mật độ khối lượng (dài) $\gamma = 1$). Trong trường hợp tổng quát, đường cong C không đồng chất có mật độ khối lượng (dài) $\gamma = \gamma(x, y)$ thì áp dụng tích phân đường loại một và làm tương tự ta có:

$$M_x = \int_C y\gamma(x, y)ds; \quad M_y = \int_C x\gamma(x, y)ds$$

$$x_0 = \frac{\int_C x\gamma(x, y)ds}{\int_C \gamma(x, y)ds}; \quad y_0 = \frac{\int_C y\gamma(x, y)ds}{\int_C \gamma(x, y)ds}$$

$$I_x = \int_C y^2\gamma(x, y)ds; \quad I_y = \int_C x^2\gamma(x, y)ds; \quad I_0 = \int_C (x^2 + y^2)\gamma(x, y)ds$$

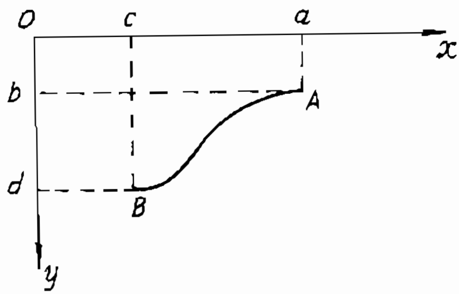
4.2. Công của một lực

Ta biết về cơ học tích phân đường $\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ là công T của lực:

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} \text{ trên đường cong } C\text{: } T = \int_C Pdx + Qdy.$$

Nếu $\int\limits_C$ không phụ thuộc đường C nối hai điểm A, B $\left(\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ thì công không phụ thuộc đường đi.

Thí dụ: Tìm công của trọng lực khi đi từ điểm $A(a, b)$ đến điểm $B(c, d)$. Gọi m là khối lượng của động tử, thì ta biết trọng lực $\bar{F}$ có độ lớn là mg và hướng xuống dưới. Do đó nếu lấy hệ tọa độ như hình vẽ thì $\vec{F} = mg\,\vec{j}$ *(hình 165)*.



Hình 165

Ở đây $P = 0$, $Q = mg$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ nên công T không phụ thuộc đường đi và:

$$T = \int\limits_{(A)}^{(B)} mgdy = mgy\Big|_{(a,b)}^{(c,d)} = mg(d-b)$$

4.3. Tính diện tích

Ta đã áp dụng tích phân đơn, kép để tính diện tích. Từ công thức Green:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_C Pdx + Qdy$$

Lấy $P = -y$, $Q = x$ thì $\iint\limits_D 2dS = \oint\limits_C xdy - ydx$ nhưng $\iint\limits_D dS = S$ là diện tích miền D. Do đó ta có công thức tính diện tích $S = \frac{1}{2}\oint\limits_C xdy - ydx$.

Tương tự lấy $Q = x$, $P = 0$ thì $S = \oint\limits_C xdy$

$$Q = 0,\ P = -y \text{ thì } S = -\oint\limits_C ydx$$

Thí dụ:

Tính diện tích của ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Áp dụng công thức đầu ta có:

$$S = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t . b\cos t + b\sin t . a\sin t)\,dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

4.4. Tìm hàm u biết du = Pdx + Qdy

Nếu $Pdx + Qdy$ là một vi phân toàn phần của u thì $du = Pdx + Qdy$, và:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy + C$$

hay

$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + C$, $(x_0, y_0) \in D$: miền đơn liên liên tục của P, Q và $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$

Thí dụ:

Tìm u, biết $du = (2x - y + 1)dx + (2y - x + 1)dy$

Ở đây $P = 2x - y + 1$, $Q = 2y - x + 1$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$

Vậy:

$$u = \int_0^x (2x - 0 + 1)\,dx + \int_0^y (2y - x + 1)\,dy + C \quad (\text{lấy } x_0 = y_0 = 0)$$

hay $\qquad u = x^2 + x + y^2 - xy + y + C.$

B. TÍCH PHÂN MẶT

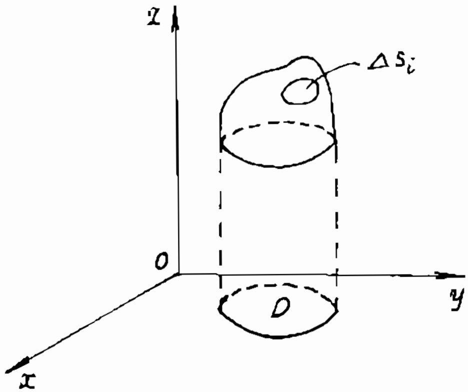
Ta đã mở rộng định nghĩa tích phân kép là tích phân của hàm hai biến $f(x, y)$ lấy trong một miền D nào đó để định nghĩa tích phân bội ba là tích phân của hàm ba biến $f(x, y, z)$ lấy trong một miền V nào đó, bây giờ ta mở rộng định nghĩa tích phân kép theo một hướng khác, định nghĩa tích phân của hàm ba biến $f(x, y, z)$ lấy trên một mặt S nào đó gọi là tích phân mặt.

§1. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI MỘT

1.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(M)$ với $M(x, y, z)$ xác định trên một mặt S nào đó (H.166).

- Chia mặt S ra làm n phần bất kỳ không dẫm lên nhau gọi tên và diện tích của chúng lần lượt là: $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_i, \ldots, \Delta S_n$



Hình 166

- Lấy một điểm tuỳ ý

$$M_i(x_i, y_i, z_i) \subset \Delta S_i \ (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ và lập tổng: } I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$$

- Đặt $d = \max d_i$, d_i là đường kính của ΔS_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Nếu $I_n \to I$ xác định khi $n \to \infty$ sao cho $d \to 0$ thì I gọi là tích phân mặt loại một của hàm số $f(M)$ lấy trên mặt S. Ký hiệu:

$$I = \iint_S f(M)dS \quad hay \quad I = \iint_S f(x, y, z)dS$$

Nếu mặt S kín thì ký hiệu $I = \oiint\limits_S f(M)dS$. ***Đặc biệt f(M) = 1 thì*** $\iint\limits_S dS = S$ ***là diện tích mặt S. Các tính chất của tích phân mặt loại một đều giống các tính chất của tích phân đường loại một.***

1.2. Ý nghĩa cơ học

Coi $f(M)$ là mật độ khối lượng (mặt) của mặt S ($f(M) > 0$) và định nghĩa khối lượng m của mặt S là:

$$m = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$$

thì theo định nghĩa tích phân mặt loại một, ta có: $m = \iint\limits_S f(M)dS$.

1.3. Cách tính

Giả sử mặt S có phương trình $z = z(x, y)$, hình chiếu của S trên mặt phẳng xOy là miền D. Dựa vào định nghĩa tích phân mặt loại một và tích phân kép rồi lý luận tương tự như khi tính tích phân đường loại một, bằng cách chuyển về tính tích phân kép, ta có:

$$I = \iint\limits_S f(x, y, z)dS = \iint\limits_D f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy$$

Từ công thức (1) lý luận tương tự như đối với tích phân đường loại một, ta suy ra:

Định lý 4. (Tồn tại của tích phân mặt loại một)

Nếu hàm f(x, y, z) liên tục trên mặt trơn hay trơn từng phần S (Chương 8, phần C : Chú ý) thì tích phân mặt loại một của hàm đó trên S là tồn tại.

Thí dụ: Tính $I = \iint\limits_S \sqrt{(x^2 + y^2)}dS$.

S là mặt bán cầu $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

Ta có:

$$I = \iint_S \sqrt{(x^2 + y^2)}dS = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy$$

Ở đây D là hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$ còn $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$ do đó:

$$I = R\iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ độc cực ta có:

$$I = R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2\pi R\left(\int_0^R \frac{R^2 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} - \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\,dr\right)$$

$$= 2\pi R\left[R^2 \arcsin\frac{r}{R}\right]\Bigg|_0^R - \left(\frac{r}{2}\sqrt{R^2 - r^2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{r}{R}\right)\Bigg|_0^R =$$

$$= 2\pi R\left(R^2\frac{\pi}{2} - \frac{R^2}{2}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2 R^3}{2}$$

1.4. Áp dụng: Moment tĩnh tọa độ trọng tâm, moment quán tính của một mặt.

Tương tự như đã tính đối với các tích phân trước ta có công thức tính moment tĩnh M_{xy}, M_{yz}, M_{zx} của mặt S, đối với các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx:

$$M_{xy} = \iint_S \gamma(x, y, z)zdS; \quad M_{yz} = \iint_S \gamma(x, y, z)xdS; \quad M_{zx} = \iint_S \gamma(x, y, z)ydS$$

trong đó $\gamma(x, y, z)$ là mật độ khối lượng (mặt) của S.

Toạ độ trọng tâm x_0, y_0, z_0 của mặt S được xác định bởi các công thức:

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m}; \quad y_0 = \frac{M_{zx}}{m}; \quad z_0 = \frac{M_{xy}}{m}$$

trong đó $m = \iint\limits_S \gamma(x, y, z)dS$ là khối lượng của mặt S.

Các moment quán tính I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}, I_0 của mặt S đối với các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx và gốc O được xác định bởi các công thức:

$$I_{xy} = \iint\limits_S \gamma(x, y, z)z^2dS; \quad I_{yz} = \iint\limits_S \gamma(x, y, z)x^2dS$$

$$I_{zx} = \iint\limits_S \gamma(x, y, z)y^2dS; \quad I_0 = \iint\limits_S \gamma(x, y, z)(x^2 + y^2 + z^2)ydS$$

Thí dụ: Tìm các moment tĩnh M_{xy}, M_{yz}, M_{zx} và toạ độ trọng tâm của mặt bán cầu trên:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \text{ với mật độ } \gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Từ $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$ suy ra mật độ khối lượng phân bố đối xứng với trục Oz, do đó trọng tâm của bán cầu phải ở trên trục Oz; nghĩa là $x_0 = y_0 = 0$. Theo công thức tọa độ trọng tâm suy ra $M_{yz} = M_{zx} = 0$. Vậy ta chỉ cần tính M_{xy}, và z_0....

Ta có:

$$M_{xy} = \iint\limits_S z\sqrt{x^2 + y^2}dS = \iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\sqrt{x^2 + y^2}\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$= R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3}\pi R^4$$

$$m = \iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}dS = \frac{\pi^2 R^3}{2} \text{ (xem thí dụ ở 1.3)}$$

$$z_0 = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{2\pi R^4}{3}\cdot\frac{2}{\pi^2 R^3} = \frac{4R}{3\pi}$$

§2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI

2.1. Mặt định hướng

Xét mặt trơn S giới hạn bởi một đường trơn từng phần C (H.167).

Lấy $M_0 \in S$ và dựng pháp tuyến $\vec{N}$ của S tại M_0, nếu xuất phát từ M_0 đi theo một đường khép kín bất kỳ L trên S không cắt biên giới C của S, trở lại vị trí xuất phát M_0 mà hướng của pháp tuyến tại M_0 không thay đổi thì mặt S gọi là mặt hai phía, ngược lại nếu hướng của pháp tuyến đổi ngược lại thì S gọi là mặt một phía. Ta chỉ xét mặt hai phía.

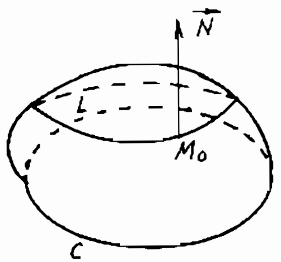
Chẳng hạn:

- Mặt trơn S bất kỳ có phương trình $z = f(x, y)$ là một mặt hai phía. Phía mà tại mọi điểm của nó, hướng của pháp tuyến làm với Oz một góc nhọn là phía trên của S, phía kia thì ngược lại gọi là phía dưới của S.

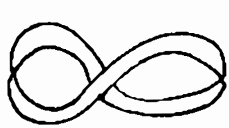
- Một mặt kín bất kỳ không tự cắt S là một mặt hai phía (mặt cầu, mặt ellipsoide...) phía có pháp tuyến hướng vào bên trong của miền giới hạn bởi mặt S gọi là phía trong của S, ngược lại, phía kia gọi là phía ngoài của S.

Một mặt hai phía cũng gọi là mặt định hướng được còn mặt một phía được gọi là mặt không định hướng được.

Trong thực tế cũng có những mặt một phía chẳng hạn băng Môbius (H.168).

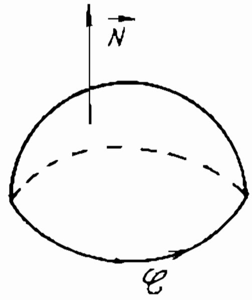


Hình 167



Hình 168

Một mặt S gọi là định hướng được từng phần (mảnh) nếu nó là liên tục và được chia thành một số hữu hạn phần định hướng được bởi các đường trơn từng phần. Cho một mặt định hướng S giới hạn bởi đường cong C. Ta gọi hướng dương trên C ứng với một phía đã chọn của mặt S là hướng từ chân đến đầu của một quan sát viên nằm theo C nhìn thấy phía đã chọn của mặt S ở bên trái (H. 169).



Hình 169

2.2. Định nghĩa tích phân mặt loại hai

Cho hàm vecteur $\vec{F}$, đối vô hướng M(x, y, z):

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$$

xác định trên mặt hai phía S. Chọn một phía của S ứng với pháp tuyến

$$\vec{N} = \vec{N}(M) = \cos\alpha(M)\vec{i} + \cos\beta(M)\vec{j} + \cos\gamma(M)\vec{k}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ là các cosin chỉ hướng của $\vec{N}$ tại $M \subset S$). Ta gọi tích phân mặt loại một của hàm: $\vec{F}\vec{N} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$ trên mặt S:

$$I = \iint_S \vec{F}\vec{N}dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

là tích phân mặt loại hai của hàm $\vec{F}(M)$ hay của các hàm, P, Q, R lấy trên phía đã chọn của mặt S. Theo định nghĩa:

$$I = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(M_i)\cos\alpha(M_i) + Q(M_i)\cos\beta(M_i) + R(M_i)\cos\gamma(M_i)]\Delta S_i$$

Coi ΔS_i như phẳng và gọi hình chiếu của nó trên mặt phẳng Oyz, Ozx, Oxy lần lượt là:

$$\Delta S_i^{(1)},\ \ \Delta S_i^{(2)},\ \ \Delta S_i^{(3)}\ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Theo định nghĩa hình chiếu ta có:

$$\cos\alpha(M_i)\Delta S_i = \Delta S_i^{(1)},\ \ \cos\beta(M_i)\Delta S_i = \Delta S_i^{(2)},\ \ \cos\gamma(M_i)\Delta S_i = \Delta S_i^{(3)}$$

Khi đó:

$$I = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(M_i)\Delta S_i^{(1)} + Q(M_i)\Delta S_i^{(2)} + R(M_i)\Delta S_i^{(3)}]$$

Do đó ta cũng ký hiệu tích phân mặt loại hai là:

$$I = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS \quad (1)$$

Nếu mặt S là kín ta cũng ký hiệu: $I = \oiint_S$.

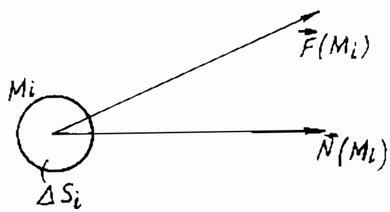
Các tính chất của tích phân mặt loại hai đều giống các tính chất của tích phân đường loại hai (kể cả tính chất đổi hướng mặt lấy tích phân).

2.3. Ý nghĩa cơ học

Xét mặt S đặt trong một chất lỏng nào đó

$\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$ là vectơ tốc độ tại điểm M của chất lỏng đó. Trong phần ΔS_i (H.170) của S coi $\vec{F} = \vec{F}(M_i)$ (M_i là một điểm tuỳ ý trong phần đó) thì lưu lượng gần đúng của chất lỏng đó (trong một đơn vị thời gian) qua ΔS_i là:

$$\vec{F}(M_i)\vec{N}(M_i)\Delta S_i$$



Hình 170

trong đó $\vec{N}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là vecteur pháp tuyến của phía đã chọn của S và

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i)\vec{N}(M_i)\Delta S_i$$

là lưu lượng gần đúng qua mặt S. Người ta định nghĩa lưu lượng Φ của chất lỏng qua S là

$$\Phi = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i)\vec{N}(M_i)\Delta S_i$$

$$= \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(M_i)\cos\alpha(M_i) + Q(M_i)\cos\beta(M_i) + R(M_i)\cos\gamma(M_i)]\Delta S_i\ .$$

Theo định nghĩa tích phân mặt loại hai:

$$\Phi = \iint_S [P(M)\cos\alpha + Q(M)\cos\beta + R(M)\cos\gamma]dS$$

$$= \iint_S P(M)dydz + Q(M)dzdx + R(M)dxdy$$

2.4. Cách tính

Giả sử điều kiện tồn tại của tích phân (1) thoả mãn. Ta chỉ tính

$$I_1 = \iint_S R(x,y,z)dxdy \qquad (a)$$

còn các tích phân $\iint_S P(M)dydz$, $\iint_S Q(M)dzdx$ sẽ được tính tương tự. Giả sử mặt S cho bởi phương trình $z = z(x, y)$ và hình chiếu của nó trên mặt phẳng xOy là miền D. Dựa vào định nghĩa tích phân mặt loại hai và tích phân kép ta đi đến:

- Nếu tích phân lấy theo phía trên của mặt S thì ta có công thức tính (a) bằng cách chuyển về tính tích phân kép:

$$I_1 = \iint_S R(x,y,z)dxdy = \iint_D R[x,y,z(x,y)]dxdy \qquad (1)$$

- Nếu tích phân lấy theo phía dưới của S thì.

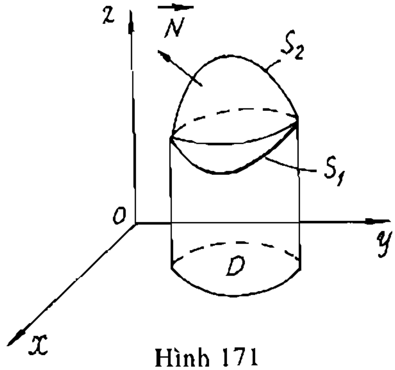
$$I_1 = \iint_S R(x,y,z)dxdy = -\iint_D R[x,y,z(x,y)]dxdy \qquad (2)$$

Thực vậy, xét tích phân lấy theo phía trên của S. Theo định nghĩa:

$$I_1 = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)\cos\gamma(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$$

$$= \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} R[x_i, y_i, z_{(x_i, y_i)}]\Delta S_i^{(3)}, \qquad \cos\gamma(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i = +\Delta S_i^{(3)}$$

vì pháp tuyến $\vec{N}$ của phía trên của S làm với Oz góc nhọn γ. Đây chính là tổng tích phân kép của hàm $R[x, y, z(x, y)]$ trên miền D, theo định nghĩa tích phân kép ta có công thức (1). Rõ ràng, nếu lấy tích phân theo phía dưới của S ta có công thức (2) vì khi đó γ là góc tù ($\cos\gamma < 0$).



Hình 171

Bây giờ xét trường hợp mặt S kín.

Giả sử hình chiếu của S trên mặt phẳng Oxy là miền D và đường trên S có hình chiếu là biên của D chia S ra làm hai phần, phần dưới giả sử có phương trình $z = z_1(x, y)$ và phần trên giả sử có phương trình $z = z_2(x, y)$. (H. 171). Nếu lấy theo phía ngoài của S thì theo trên ta có:

$$I = \iint_S R(x, y, z)dxdy = \iint_D \{R[x, y, z_2(x, y)]dxdy - R[x, y, z_1(x, y)]\}dxdy$$

Nếu tích phân lấy theo phía trong của S thì ngược lại. Tương tự như các tích phân đường và mặt loại một, từ các công thức (1), (2) hoặc (3) suy ra:

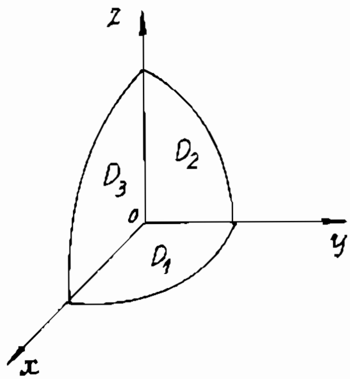
Định lý: (Tồn tại của tích phân mặt loại hai)

Nếu các hàm P, Q, R liên tục trên một mặt định hướng từng phần S thì tích phân mặt loại hai của các hàm đó lấy theo một phía của S là tồn tại.

Thí dụ:

1) Tính $\qquad I = \iint\limits_S xdydz + dzdx + xz^2dxdy$

S là phía ngoài của $\dfrac{1}{8}$ thứ nhất của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Đối với các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx thì S có phương trình: (H.172)



Hình 172

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$
$$x = \sqrt{1 - y^2 - z^2},$$
$$y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$$

Do đó, gọi D_1, D_2, D_3 là hình chiếu của S trên các mặt phẳng tọa độ đó thì áp dụng công thức (1) và chuyển sang toạ độ độc cực, ta có:

$$I_1 = \iint\limits_S xz^2dxdy = \iint\limits_{D_1} x(1 - x^2 - y^2)dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^1 r^2(1 - r^2)dr = \frac{2}{15}$$

$$I_2 = \iint\limits_S xdydz = \iint\limits_{D_2} \sqrt{1 - y^2 - z^2}\,dydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r\sqrt{1 - r^2}\,dr = \frac{\pi}{6}$$

$$I_3 = \iint\limits_S dxdz = \iint\limits_{D_3} dxdz = \frac{\pi}{4}$$

Do đó: $I = I_1 + I_2 + I_3 = \dfrac{2}{15} + \dfrac{5\pi}{12}$.

2) Tính $I = \iint\limits_S zdxdy$, S là phía ngoài của mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Ta có: $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, dấu + và - ứng với nửa trên và nửa dưới của mặt cầu. Do đó theo công (3) ta có:

$$I = \iint\limits_S zdxdy = \iint\limits_{D_9} [\sqrt{1 - x^2 - y^2}) - (-\sqrt{1 - x^2 - y^2})]dxdy$$

$$= 2\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}dxdy = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1 - r^2}rdr = \frac{4}{3}\pi \text{ . } (D: x^2 + y^2 \leq 1)$$

3) Tính $I = \iint\limits_S x^3 dydz$

S là phía trên của nửa trên của mặt ellipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Phương trình của nửa trên của ellipsoide đối với mặt phẳng Oyz là:

$$x = \pm a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$$

và hình chiếu D_1 của nó trên mặt phẳng Oyz là $\frac{1}{2}$ của hình ellipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$, z ≥ 0. Theo công thức (3) ta có:

$$I = 2a^3 \iint\limits_{D_1} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} dydz$$

Chuyển sang tọa độ cực suy rộng $y = br\cos\varphi$, $z = cr\sin\varphi$:

$$I = 2a^3 \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^1 (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} bcrdr = \frac{2}{5}\pi a^3 bc$$

§3. CÔNG THỨC STOKES VÀ OSTROGRADSKI

3.1. Công thức Stokes

Ta đã có công thức Green liên hệ giữa tích phân đường và tích phân kép. Bây giờ ta sẽ xét một công thức khác liên hệ giữa tích phân đường và tích phân mặt gọi là công thức Stokes.

Định lý: ***Nếu các hàm $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ cùng các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên một mặt định hướng từng phần S giới hạn bởi đường trơn từng phần C thì ta có công thức:***

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma \right] dS$$

$$= \oint_C (P\cos\alpha' + Q\cos\beta' + R\cos\gamma')\, ds$$

trong đó tích phân mặt lấy theo phía đã chọn với pháp tuyến $\vec{N}$ $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ và tích phân đường lấy theo chiều dương với tiếp tuyến $\vec{\tau}$ $(\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$ ứng với phía đã chọn của S.

Công thức Stokes có thể viết dưới dạng khác:

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= \oint_C Pdx + Qdy + Rdz$$

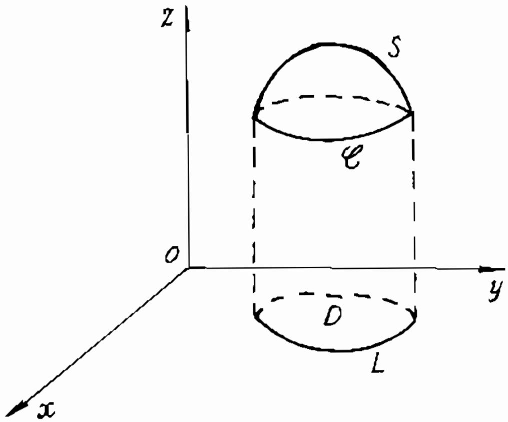
Chú ý rằng trong mặt phẳng, công thức Stokes trở thành công thức Green đã biết.

Để dễ nhớ công thức Stokes, ta dùng ký hiệu hình thức:

$$\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_C (P\cos\alpha' + Q\cos\beta' + R\cos\gamma')\, dS$$

hay

$$\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_C Pdx + Qdy + Rdz$$



Hình 173

***Chứng minh:** Ta chỉ xét mặt S có phương trình $z = z(x, y)$, hình chiếu của S trên mặt phẳng Oxy là miền D, và đường C có hình chiếu là L, biên của D (H.173).

Xét $I = \oint_C Pdx$ vì $z = z(x, y)$ nên $\oint_C P(x, y, z)dx = \oint_L P[x, y, z(x, y)]dx$.

Áp dụng công thức Green với $P = P[x, y, z(x, y)]$, $Q = 0$ ta có:

$$\oint_L P[x, y, z(x, y)]dx = -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} z'_y\right)dxdy$$

$$= -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial z} z'_y dxdy = -\iint_S \frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma dS - \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} z'_y \cos\gamma dS$$

Ta biết pháp tuyến của mặt S có thành phần là z'_x, z'_y, -1 nên

$$\cos\alpha = \frac{z'_x}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}; \quad \cos\beta = \frac{z'_y}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}$$

suy ra $z'_y \cos\gamma = -\cos\beta$. Do đó:

$$\oint_C Pdx = -\iint_S \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma dS + \iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta dS$$

Tương tự $$\oint_C Qdy = -\iint_S \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha dS + \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma dS$$

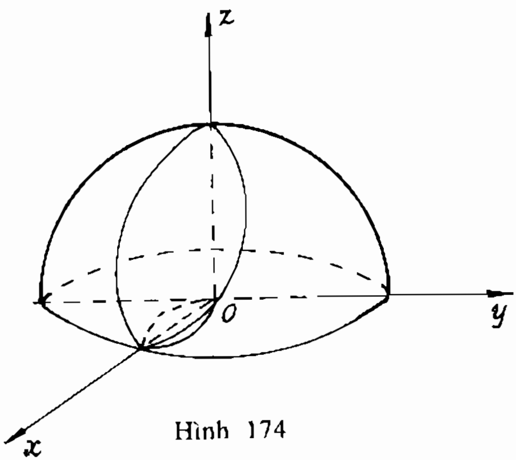
$$\oint_C Rdz = -\iint_S \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta dS + \iint_S \frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha dS$$

Cộng các công thức này vế với vế ta được công thức Stokes.

Thí dụ: Áp dụng công thức Stokes tính:

1) $$I = \oint_C ydx + zdy + xdz$$

với C là đường tròn: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + z = a$ (H.174) chạy ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của Ox. Để tính I ta dùng công thức Stokes chuyển tích phân trên đường C về tích phân trên mặt S là mặt tròn có biên giới là C.



Hình 174

Ở đây $P = y$, $Q = z$, $R = x$.

Do đó:

$$I = \oint_C ydx + zdy + xdz = \ldots = -\iint_S dydz + dzdx + dxdy$$

$$= -(\iint_{D_1} dydz + \iint_{D_2} dzdx + \iint_{D_3} dxdy)$$

D_1, D_2, D_3 là hình chiếu của mặt tròn trên các mặt phẳng toạ độ Oyz, Ozx, Oxy ta có $D_2 = 0$; $D_1 = D_3$. Vì mặt tròn S có bán kính là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ và hợp với mặt phẳng Oxy một góc $\frac{\pi}{4}$, nên theo lý thuyết hình chiếu diện tích của D_3 là:

$$\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$$

Vậy $$I = -\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$$

2) $$I = \oint_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$$

trong đó C là đường $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ $(a > 0,\ h > 0)$ chạy ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Ox (H.175). Theo công thức Stokes ta có:

$$I = -2\iint_S dydz + dzdx + dxdy = -2\iint_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)dS$$

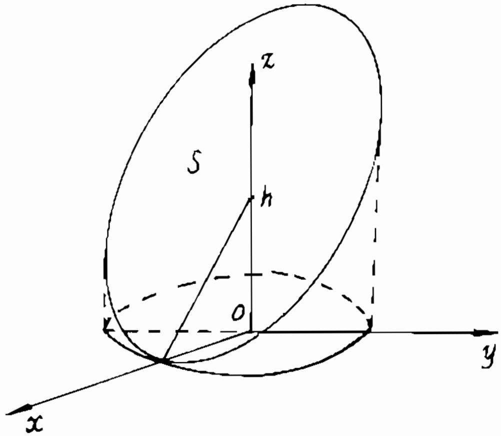
S là hình phẳng biên giới là đường C; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ là các cosin chỉ hướng của pháp tuyến $\overrightarrow{N}$ của phía trên của S (dấu +).

Chuyển về tích phân kép, chú ý

$$dS\cos\alpha = -z'_x dxdy = \frac{h}{a}dxdy,\ dS\cos\beta = -z'_y dxdy = 0;$$

$dS\cos\gamma = dxdy$ và hình chiếu của S trên mặt phẳng Oxy là hình tròn D: $x^2 + y^2 \le a^2$, ta có:

$$I = -2\iint_D \left(1 + \frac{h}{a}\right) dxdy = -2\left(1 + \frac{h}{a}\right)\pi a^2 = -2\pi a(a + h)$$



Hình 175

Chú ý: Từ công thức Stokes, có thể chứng minh điều kiện cần và đủ để tích phân đường trong không gian $\int_C Pdx + Qdy + Rdz$ không phụ thuộc đường lấy tích phân, hay

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = 0 \quad \text{hoặc} \quad Pdx + Qdy + Rdz$$

là một vi phân toàn phần của một hàm số u nào đó là P, Q, R có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong một miền đơn liên chứa C và:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

và ta cũng có công thức tìm hàm $u(x, y, z)$ tương tự như trường hợp hàm hai biến.

Thí dụ: Chứng minh:

$$I = \oint_C yzdx + xzdy + xydz = 0 \text{ (với mọi đường khép kín } C\text{)}.$$

Ở đây $P = yz$, $Q = xz$, $R = xy$, theo công thức Stokes:

$$I = \oint_C yzdx + xzdy + xydz = \iint_S 0\, dS = 0$$

3.2. Công thức Ostrogradski (liên hệ giữa tích phân mặt và tích phân bội ba)

Định lý: ***Nếu các hàm P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z) cùng các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền compact V giới hạn bởi mặt kín trơn từng phần S thì ta có công thức:***

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

trong đó tích phân mặt lấy theo phía ngoài của S.

Công thức này gọi là công thức Ostrogradski.

Chứng minh: Ta chỉ chứng minh trường hợp mà các đường thẳng song song với Oz, không cắt S quá hai điểm, trường hợp tổng quát có thể đưa về trường hợp này.

Giả sử mặt S gồm hai phần, phần dưới có phương trình $z = z_1(x, y)$ và phần trên có phương trình $z = z_2(x, y)$ cũng có hình chiếu trên mặt phẳng Oxy là miền D.

Xét

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_D \{R[x, y, z_2(x, y)] - R[x, y, z_1(x, y)]\} dxdy.$$

Theo công thức tính tích phân mặt trong trường hợp mặt kín thì:

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dV = \oiint_S R(x, y, z) dxdy$$ (tích phân lấy theo phía ngoài của S).

Tương tự:

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dV = \oiint_S Q(x, y, z) dzdx\,; \quad \iiint_V \frac{\partial R}{\partial x} dV = \oiint_S R(x, y, z) dydz$$

Cộng vế với vế các công thức này ta có công thức Ostrogradski

Thí dụ: áp dụng công thức Ostrogradski tính

$I = \oiint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, S là phía ngoài của mặt cầu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Ta sẽ tính I bằng cách áp dụng công thức Ostrogradski, chuyển về tính tích phân bội ba. Ở đây:

$$P = x^3,\ Q = y^3,\ R = z^3,\ \frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 3y^2,\quad \frac{\partial R}{\partial z} = 3z^2$$

do đó:

$$I = \oiint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy = 3\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)dV =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{12\pi}{5} R^5$$

Chú ý: 1) Từ công thức Ostrogradski có thể chứng minh điều kiện cần và đủ để tích phân mặt:

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy\ ,$$

không phụ thuộc mặt lấy tích phân (chỉ phụ thuộc đường giới hạn mặt) hay tích phân lấy theo mặt kín bằng không là:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

2) Trong công thức Ostrogradski, đặt $P = x$, $Q = y$, $R = z$ ta có công thức tính thể tích của miền V bằng tích phân theo phía ngoài của mặt giới hạn miền V:

$$V = \frac{1}{3}\oiint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$$

Thí dụ: Tính thể tích của hình ellipsoide : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Theo công thức trên: $V = \frac{1}{3}\oiint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ (S là mặt ellipsoide, phía ngoài)

Tính toán ta có: $$V = \frac{4}{3}\pi abc$$

§4. CÁC YẾU TỐ CỦA GIẢI TÍCH VECTEUR
(Lý thuyết về trường)

4.1. Trường vô hướng

a) Định nghĩa: Trong vật lý ta biết rằng:

- Khi xét nhiệt độ T phân bố trong một phần không gian V nào đó ta thấy tại mỗi điểm $M(x, y, z)$ của V có những nhiệt độ khác nhau nghĩa là trong V nhiệt độ T là hàm số của điểm M.

$T = T(M) = T(x, y, z)$. Người ta nói rằng trong phần không gian V có xác định một trường nhiệt độ, đặc trưng bởi hàm nhiệt độ $T = T(x, y, z)$.

Khi đặt một điện tích q tại gốc toạ độ O thì các điểm $M(x, y, z)$ chung quanh O có những điện thế u khác nhau xác định bởi công thức:

$$u = \frac{q}{r} \text{ trong đó } r = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Như vậy u là hàm số của điểm $M(x, y, z)$

$$u = u(M) = u(x, y, z) = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Ta nói phần không gian chung quanh O có xác định một trường điện thế đặc trưng bởi hàm thế: $u = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Vì nhiệt độ hay điện thế chỉ biểu diễn thuần tuý bằng một số nên chúng là những đại lượng vô hướng và trường nhiệt độ hay điện thế gọi là những trường vô hướng. Một cách tổng quát ta có định nghĩa:

Trường vô hướng là phần không gian mà tại mỗi điểm M(x, y, z) của nó có xác định một đại lượng vô hướng u, u = u(M) = u(x, y, z), gọi là hàm vô hướng của nó. Do đó để nghiên cứu các đặc trưng của trường, ta chỉ nghiên cứu hàm u.

Nếu hàm vô hướng u không phụ thuộc z: $u = u(x, y)$ thì trường xác định bởi u gọi là trường phẳng.

Nếu u không phụ thuộc thời gian thì trường gọi là trường dừng, trái lại thì gọi là trường không dừng. Ta chỉ nghiên cứu trường dừng (thực tế ít khi có trường dừng, nhưng chỉ xét một khoảng thời gian khá nhỏ và coi trường là trường dừng).

Quỹ tích các điểm M(x, y, z) của trường mà u lấy cùng một trị số gọi là mặt đồng mức hay mặt đẳng trị của trường.

Như vậy phương trình của mặt đồng mức là $u = u(x, y, z) = C$ vì C có thể lấy nhiều trị số khác nhau nên trong trường có nhiều mặt đồng mức khác nhau, không giao nhau.

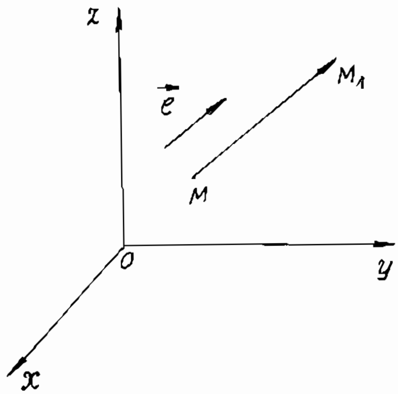
Thí dụ: Đối với trường điện thế xét ở trên thì mặt đồng mức có phương trình:

$$u = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = C \quad \text{hay} \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{q^2}{C^2}$$

Đó là những mặt cầu đồng tâm O, bán kính $\frac{q}{C}$. Trong trường hợp trường phẳng $u = u(x, y)$ thì quỹ tích các điểm $u(x, y) = C$ gọi là đường đồng mức. Bây giờ ta chuyển sang xét các đặc trưng quan trọng của trường là: tốc độ biến thiên của trường theo một hướng bất kỳ và hướng mà tốc độ biến thiên là lớn nhất.

b) Đạo hàm theo hướng: Ta đã xét các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ của hàm số $u = u(x, y, z)$, về cơ học các đạo hàm này biểu thị tốc độ biến thiên của hàm số đối với x, y, z hay cũng thế theo các hướng của các trục Ox, Oy, Oz.

Để xét tốc độ biến thiên của trường nghĩa là của hàm $u(x, y, z)$ theo một hướng bất kỳ ta đi đến khái niệm đạo hàm theo một hướng bất kỳ.



Hình 176

Định nghĩa:

Cho một hướng đặc trưng bằng vecteur đơn vị $\vec{e}$ (cosα, cosβ, cosγ) và hàm $u = u(M) = u(x, y, z)$.

Xét các điểm $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ sao cho $\overrightarrow{MM_1}$ song song với $\vec{e}$ (H 176). Đặt $\left|\overrightarrow{MM_1}\right| = \rho$, $x_1 - x = \Delta x$, $y_1 - y = \Delta y$, $z_1 - z = \Delta z$ thì $\Delta x = \rho\cos\alpha$, $\Delta y = \rho\cos\beta$, $\Delta z = \rho\cos\gamma$ và $x_1 = x + \rho\cos\alpha$, $y_1 = y + \cos\rho\beta$, $z_1 = z + \rho\cos\gamma$. ***Nếu:***

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{u(M_1) - u(M)}{\rho} \lim_{\rho\to 0}\frac{u(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\cos\beta, z+\rho\cos\gamma) - u(x, y, z)}{\rho}$$

tồn tại, thì giới hạn này gọi là đạo hàm của hàm số u tại điểm M theo hướng $\vec{e}$.

Ký hiệu: $\frac{\partial u}{\partial e} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u}{\rho}$

Đặc biệt $\vec{e} \,//\, Ox$ thì $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = \cos\gamma = 0$, $\rho = \Delta x$ và

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Tương tự $\vec{e} \parallel Oy$ thì $\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial y}$, $\vec{e} \parallel Oz$ thì $\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial z}$, nghĩa là các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ là các đạo hàm theo các hướng đặc biệt song song với Ox, Oy, Oz, vì tại một điểm có rất nhiều hướng đi, nên tại một điểm cũng có rất nhiều đạo hàm theo hướng. Để tính các đạo hàm theo hướng ta có định lý:

Định lý: ***Nếu hàm số u = u(x, y, z) khả vi tại M(x, y, z) thì đạo hàm theo hướng $\bar{e}$ (cosα, cosβ, cosγ) tại M(x, y, z) tồn tại và được tính theo công thức***

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Chứng minh: Theo giả thiết u khả vi tại M nên ta có:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + O(\rho)$$

$O(\rho)$ là vô cùng bé bậc cao hơn $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, mặt khác $\Delta x = \rho\cos\alpha$; $\Delta y = \rho\cos\beta$; $\Delta z = \rho\cos\gamma$ do đó:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\rho\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\rho\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\rho\cos\gamma + O(\rho)$$

và

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta u}{\rho} = \lim_{\rho \to 0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \frac{O(\rho)}{\rho}\right)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

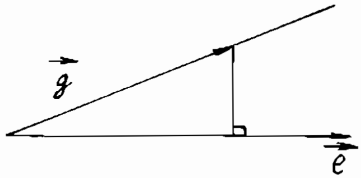
vì $\lim_{\rho \to 0} \frac{O(\rho)}{\rho} = 0$ do $O(\rho)$ là vô cùng bé bậc cao hơn $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Hệ quả:

1) Nếu cho $\vec{e}'(\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$ ngược với hướng của $\vec{e}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ thì $\dfrac{\partial u}{\partial e'} = -\dfrac{\partial u}{\partial e}$ vì lúc đó $\alpha' = \pi + \alpha$, $\beta' = \pi + \beta$, $\gamma = \pi + \gamma$ nên các cos đổi dấu.

2) Nếu trường phẳng $u = (x, y)$ thì $\dfrac{\partial u}{\partial e} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha$, vì lúc đó $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$.

Thí dụ: Tìm đạo hàm của hàm số $u = xyz$ tại điểm $M(5, 1, 2)$ theo hướng $\vec{e}$ nối từ M đến $M_1(7, -1, 3)$.



Hình 177

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = zx, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy$$

Do đó tại $M(5, 1, 2)$

thì

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 10, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 5$$

mặt khác $\overrightarrow{MM_1} = \{7 - 5, -1 - 1, 3 \quad 2\} = \{2, -2, 1\}$

nên $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \dfrac{2}{3}$, $\cos\beta = -\dfrac{2}{3}$; $\cos\gamma = 1$. Vậy theo công thức tính đạo hàm theo hướng ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{2}{3} + 10\frac{-2}{3} + 5\frac{1}{3} = -\frac{11}{3}$$

dấu (-) chứng tỏ hàm số u là giảm theo hướng $\vec{e}$.

c) Gradient: Bây giờ ta xét vấn đề: Tốc độ biến thiên của trường theo hướng nào là lớn nhất ? Nghĩa là đạo hàm của hàm $u(x, y, z)$ theo hướng nào là lớn nhất ?

Xét

$\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$ Ta biết $\vec{e}$ (cosα, cosβ, cosγ) nếu dựa vào vecteur $\vec{g}$

$$\vec{g} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

thì $\frac{\partial u}{\partial e} = \vec{g}.\vec{e} = |\vec{g}|\,|\vec{e}|\cos\varphi = |\vec{g}|\cos\varphi$

φ là góc giữa $\vec{g}$ và $\vec{e}$. Ta thấy $\left|\frac{\partial u}{\partial e}\right|$ lớn nhất khi |cosφ| =1 tức là khi phương của $\vec{e}$ trùng với phương của $\vec{g}$. Ký hiệu $\left|\frac{\partial u}{\partial e}\right|$ lớn nhất là max $\left|\frac{\partial u}{\partial e}\right|$ thì max $\left|\frac{\partial u}{\partial e}\right| = |\vec{g}|$.

Như vậy vecteur $\vec{g}$ có tính chất là trị số tuyệt đối của đạo hàm theo hướng của nó là lớn nhất, người ta gọi $\vec{g}$ là ***vecteur gradient của trường vô hướng u và ký hiệu*** $\vec{g} = \overrightarrow{gradu}$.

Như vậy

$\overrightarrow{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ***là các vecteur đơn vị trên 3 trục.***

$$\max\left|\frac{\partial u}{\partial e}\right| = |\overrightarrow{gradu}| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

và $\frac{\partial u}{\partial e} = |\overrightarrow{gradu}|\cos\varphi = proj_{\vec{e}}\,\overrightarrow{gradu}$ ***(H.177). Từ công thức này ta có:***

Định lý 1: ***Đạo hàm của u theo hướng $\vec{e}$ bằng hình chiếu của vecteur gradient của trường u trên $\vec{e}$. Đó là sự liên hệ giữa đạo hàm theo hướng và gradient.***

Thí dụ: Xác định gradient của trường điện thế $u = \frac{q}{r} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ và tốc độ biến thiên lớn nhất của trường.

Ta có: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-qx}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} = \frac{-qx}{r^3}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-qy}{r^3}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-qz}{r^3}$.

Do đó: $\overrightarrow{gradu} = \frac{-q(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{r^3} = \frac{-q\vec{r}}{r^3}$

Tốc độ biến thiên lớn nhất của trường là:

$$V_{\max} = \max\left|\frac{\partial u}{\partial e}\right| = |\overrightarrow{gradu}| = \frac{q}{r^2}$$

Ta biết mặt đồng mức của trường là những mặt cầu đồng tâm O, do đó vecteur $\overrightarrow{gradu} = \frac{-q\vec{r}}{r^3}$ là thẳng góc với các mặt đồng mức. Trong trường hợp tổng quát , u là một trường bất kỳ, điều đó vẫn đúng, ta có:

Định lý 2: ***Gradient của trường vô hướng $u = u(x, y, z)$ tại một điểm là đồng phương với pháp tuyến của mặt đồng mức của trường đi qua điểm ấy.***

Thực vậy, xét mặt đồng mức $u(x, y, z) = C_0$ của trường, ta có $u(x, y, z) - C_0 = 0$. Ta lại biết pháp tuyến của mặt đồng mức tại $M(x, y, z)$ của nó có thành phần là: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$. Đây cũng chính là các thành phần của gradient của trường tại M.

Từ định lý này ta suy ra:

Hệ quả: ***Đạo hàm theo hướng $\frac{\partial u}{\partial e}$ tại M triệt tiêu trên mọi hướng tiếp xúc với mặt đồng mức qua điểm M.***

Từ định nghĩa dễ dàng suy ra:

Tính chất:

$$1)\ \overrightarrow{grad}\,(u_1 + u_2) = \overrightarrow{gradu_1} + \overrightarrow{gradu_2}$$

$$2)\ \overrightarrow{grad}\,(Cu) = C\,\overrightarrow{gradu}\ \ (C = const)$$

$$3)\ \overrightarrow{grad}\,(u_1u_2) = u_1\,\overline{gradu_2} + u_2\,\overline{gradu_1}$$

$$4)\ \overrightarrow{grad}\,f(u) = f'(u)\ \overrightarrow{gradu}$$

Thực vậy, chẳng hạn xét 3). Ta có:

$$\overrightarrow{grad}\,(u_1u_2) = \frac{\partial(u_1u_2)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(u_1u_2)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(u_1u_2)}{\partial z}\vec{k}$$

$$= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}u_2 + u_1\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}u_2 + u_1\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial z}u_2 + u_1\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)\vec{k}$$

$$= u_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\vec{k}\right) + u_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$= u_1\,\overline{gradu_2} + u_2\,\overline{gradu_1}$$

4.2. Trường vecteur

Ta đã nghiên cứu trường vô hướng là phần không gian mà tại mỗi điểm của nó có xác định một đại lượng vô hướng. Bây giờ áp dụng lý thuyết tích phân mặt ta sẽ nghiên cứu trường vecteur.

a) Định nghĩa: ***Trường vecteur là phần không gian mà tại mỗi điểm $M(x, y, z)$ của nó có xác định một vecteur $\vec{F}$ suy ra $\vec{F}$ là hàm vecteur đối vô hướng $M(x, y, z)$.***

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(x, y, z)$$

Thí dụ:

1) Xét một chất lỏng tại mỗi điểm của nó có một tốc độ biểu diễn bởi vecteur $\vec{V}$, thì trong chất lỏng ta có một trường vecteur tốc độ $\vec{V}$.

2) Xét điện tích q đặt tại gốc toạ độ O thì tại mỗi điểm $M(x, y, z)$ thuộc phần không gian xung quanh O, theo định luật Coulomb, có xác định một vecteur điện

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3} \text{ với } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Như vậy phần không gian xung quanh O xác định một trường vecteur $\vec{E}$ gọi là điện trường và $\vec{E}$ gọi là vecteur điện trường. Tương tự như trường vô hướng ta chỉ xét những trường vecteur không phụ thuộc thời gian gọi là trường dừng.

b) Đường dòng: Xét trường vecteur

$$\vec{F} = \vec{F}(\mathrm{M}) = P(M)\vec{i} + Q(M)y\vec{j} + R(M)\vec{k}.$$

Ta gọi đường dòng của trường là mọi đường C mà tiếp tuyến tại mỗi điểm của nó là đồng phương với veteur của trường đi qua điểm ấy. Rõ ràng tại mỗi điểm của trường chỉ có một đường dòng duy nhất đi qua và các đường dòng của trường không cắt nhau. Để tìm phương trình của đường dòng C của trường vecteur $\vec{F}$, ta giả sử phương trình của nó là $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ thì tiếp tuyến của C tại $M(x, y, z)$ có hệ số chỉ phương là $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$. Theo định nghĩa thì:

$$\frac{x'(t)}{P} = \frac{y'(t)}{Q} = \frac{z'(t)}{R} \quad \text{hay} \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \qquad (1)$$

Hệ (1) gọi là hệ phương trình vi phân của các đường dòng của trường. Giải hệ đó, ta sẽ tìm được phương trình của các đường dòng của trường.

Thí dụ: Tìm các đường dòng của điện trường

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}, \text{ ta có } P = \frac{qx}{r^3}, \ Q = \frac{qy}{r^3}, \ R = \frac{qz}{r^3}$$

Theo (1), hệ phương trình vi phân của các đường dòng của điện trường trên là:

$$\frac{dx}{\frac{qx}{r^3}} = \frac{dy}{\frac{qy}{r^3}} = \frac{dz}{\frac{qz}{r^3}} \quad \text{hay} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

Từ hệ này tích phân (bất định) ta có:

$$\ln C_1 x = \ln C_2 y = \ln C_3 z \quad \text{hay} \quad \frac{x}{k_1} = \frac{y}{k_2} = \frac{z}{k_3} \quad k_i = \frac{1}{C_i} = \text{const};\ i = 1, 2, 3.$$

Đây là phương trình của một họ đường thẳng qua O. Vậy các đường dòng của điện trường là một họ đường thẳng qua điểm đặt điện tích q cũng gọi là họ các đường sức của điện trường.

c) Thông lượng và divergence: Về cơ học, ta biết lưu lượng Φ của chất lỏng (trong một đơn vị thời gian) có tốc độ $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ qua mặt S đặt trong chất lỏng là

$$\Phi = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

Trong đó $\vec{N}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là pháp tuyến của một phía của mặt S. Một cách tổng quát, ta định nghĩa: ***Thông lượng Φ của trường vecteur $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ qua mặt S đặt trong trường là:***

$$\Phi = \iint_S \vec{F}\vec{N}dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

$$= \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \qquad (1)$$

Thí dụ: Tìm thông lượng của điện trường $\vec{E} = \frac{q}{r^3}\vec{r}$ (gọi là điện thông) qua mặt cầu tâm O, bán kính R. Theo công thức (1) là:

$$\Phi = \iint_S \vec{F}\vec{N}dS = \iint_S \frac{q}{r^3}|\vec{r}|1\ dS \ \ (\text{vì } \vec{E} \parallel \vec{N}) = \frac{q}{R^2}\iint_S dS = \frac{q}{R^2}4\pi R^2 = 4\pi q$$

vì trên mặt cầu $r = R$.

Bây giờ xét mặt S kín trơn từng phần bao miền V, gọi thể tích của nó cũng là V. Xét điểm cố định $M(x, y, z) \in V$. Nếu $\lim\limits_{V \to M} \frac{\Phi}{V}$ tồn tại ($V \to M$: thể tích V co lại điểm M) thì giới hạn này gọi là ***divergence (độ phân kỳ) của trường vecteur $\vec{F} = \vec{F}(M)$ tại M trong trường. Ký hiệu:***

$$div\vec{F}(M) = \lim_{V \to M} \iint_S \vec{F}\vec{N}dS \qquad (2)$$

Theo công thức Ostrogradski ta có:

$$\Phi = \iint_S \vec{F}\vec{N}dS = \iint_S [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

Theo định lý trung bình (đối với tích phân bội bai ta có:

$$\iint_S \vec{F}\vec{N}dS = \left(\frac{\partial P(M_c)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M_c)}{\partial y} + \frac{\partial R(M_c)}{\partial z}\right).V$$

M_c là một điểm nào đó trong thể tích V.

Theo định nghĩa của divergence (2) ta suy ra:

$$div\vec{F}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z} \qquad (3)$$

Vậy công thức Ostrograndski viết được dưới dạng vecteur:

$$\iint_S \vec{F}\vec{N}dS = \iiint_V div\vec{F}dV \qquad (4)$$

Giả sử div$\vec{F}$ là một hàm liên tục tại $M \in V$ và div$\vec{F}$(M) > 0 theo tính chất của hàm liên tục thì tồn tại một lân cận của M trong đó div$\vec{F}$ > 0. Nếu V' là một miền giới hạn bởi mặt kín S' trong lân cận đó thì theo công thức (4) thông lượng Φ qua mặt S' từ trong ra ngoài là một số dương hay chính xác hơn: Thông lượng vào mặt S' ít hơn thông lượng ra khỏi mặt đó, khi đó ta gọi M là một điểm nguồn của trường $\vec{F}$. Ngược lại nếu div$\vec{F}$ < 0 thì M gọi là điểm rò của trường. Ta cũng gọi div$\vec{F}(M)$ là mật độ của thông lượng của trường $\vec{F}$. Đặc biệt nếu div$\vec{F}$ = 0 tại ∀M trong trường, nghĩa là trong trường không có những điểm nguồn và điểm rò (hay chính xác hơn thông lượng do các điểm nguồn phát ra bằng thông lượng do các điểm rò rỉ mất) thì thông lượng qua mọi mặt kín đặt trong trường đều bằng không.

Thí dụ:

1) Tính thông lượng của trường $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qua mặt xung quanh và mặt toàn phần của hình trụ $x^2 + y^2 \le a^2$, $0 \le z \le h$.

Ta có $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$, $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$, $F'_z = 0$. Do đó, theo (1) thông lượng Φ_1 qua mặt xung quanh S_1 của hình trụ là:

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} y \right) dS_1 \quad hay \quad \Phi_1 = \iint_{S_1} a dS_1 = 2\pi a^2 h$$

Theo (3), ta có: $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$. Theo (4) thông lượng qua mặt toàn phần của hình trụ là: $\Phi = \iiint_V 3dV = 3\pi a^2 h$

2) Xét điện trường $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{r^3}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

Gọi hình chiếu của $\vec{E}$ trên ba trục Ox, Oy, Oz là P, Q, R thì:

$$P = \frac{qx}{r^3}; \quad Q = \frac{qy}{r^3}; \quad R = \frac{qz}{r^3}; \quad \frac{\partial P}{\partial x} = q\left(\frac{-3r^2 r'_x}{r^6} x + \frac{1}{r^3} \right)$$

nhưng: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $r'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$

nên: $$\frac{\partial P}{\partial x} = q\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right) = q\left(\frac{r^2 - 3x^2}{r^5} \right)$$

Tương tự: $$\frac{\partial Q}{\partial y} = q\left(\frac{r^2 - 3y^2}{r^5} \right), \quad \frac{\partial R}{\partial z} = q\left(\frac{r^2 - 3z^2}{r^5} \right)$$

do đó: $$div\vec{E} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = q\left[\frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right] = 0$$

với $r \neq 0$ suy ra thông lượng: Φ qua mọi mặt kín giới hạn miền V không chứa gốc tọa độ đều bằng không. Bây giờ xét mặt S gồm 2 mặt, mặt cầu S_1 tâm O và một mặt S_2 bất kỳ bao quanh O (H 178)

Theo trên:

$$\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = 0 \text{ nhưng } \iint_{S_1} = -4\pi q \text{ (thí dụ phần c) suy ra } \iint_{S_2} = 4\pi q$$

(vì hướng của pháp tuyến $\vec{N}$ của S_1, S_2 là ngược nhau). Vậy: trong điện trường, điện thông qua mọi mặt kín bao quanh gốc tọa độ đều bằng $4\pi q$ (định luật Gauss).

Từ định nghĩa dễ dàng suy ra các tính chất của divergence:

1) $div(\vec{F_1} + \vec{F_2}) = div\vec{F_1} + div\vec{F_2}$

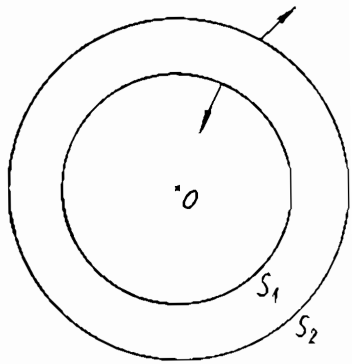
2) $div(C\vec{F}) = C.div\vec{F}; \; C = const$

3) $div(u\vec{C}) = \vec{C}.\overline{gradu}; \; \vec{C} = const$

4) $div(u\vec{F}) = \vec{F}.\overline{gradu} + udiv\vec{F}$

Thực vậy, chẳng hạn 4) giả sử $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Theo định nghĩa (3)

$$div(u\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(uP) + \frac{\partial}{\partial y}(uQ) + \frac{\partial}{\partial z}(uR)$$



Hình 178

$$= (P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z}) + u(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) = \vec{F}.\overline{gradu} + udiv\vec{F}$$

d) Lưu số (Hoàn lưu) và rotation: Về cơ học, ta biết công T của lực $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ dọc theo đường cong C là tích phân đường:

$$T = \int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_C (P\cos\alpha' + Q\cos\beta' + R\cos\gamma')ds$$

Trong đó $\vec{\tau}$ ($\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$) là vecteur tiếp tuyến đơn vị của đường C theo hướng đi trên C

Theo công thức tích vô hướng của 2 vecteur theo tọa độ ta có thể viết: $T = \int_C \overrightarrow{F}\overrightarrow{\tau}ds$

Một cách tổng quát, ta định nghĩa: Lưu số C của trường $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ dọc đường C trong trường là $C = \int_C \overrightarrow{F}\overrightarrow{\tau}\, ds$

Bây giờ trong trường xét một đường khép kín, trơn từng phần C giới hạn mặt trơn từng phần S mà ta gọi diện tích của nó cũng là S, giả sử xét chiều dương trên C ứng với phía có pháp tuyến $\overrightarrow{N}$ (cosα, cosβ, cosγ) của S.

Xét S khá bé và $\lim\limits_{S\to M} \dfrac{\oint_C \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\tau}\, ds}{S}$ (1)

($S \to M$: chỉ diện tích S thu tại điểm M).

Ta sẽ chứng minh rằng giới hạn này chỉ phụ thuộc điểm M đã chọn trong trường. Thực vậy, theo công thức Stokes ta có:

$$\oint_C \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\tau}\, ds = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS$$

Đặt: $$\overrightarrow{X} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

thì công thức này viết được dưới dạng:

$$\oint_C \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\tau}\, ds = \iint_S \overrightarrow{X}\overrightarrow{N} dS = \iint_S proj_{\overrightarrow{N}} \overrightarrow{X}(M) dS$$

áp dụng định lý trung bình đối với tích phân mặt ta có:

$$\oint_C \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\tau}\, ds = S.proj_{\overrightarrow{N}} \overrightarrow{X}(M_c) \qquad M_C \in S$$

Cho $S \to M$ thì $M_C \to M$, và:

$$proj_{\overrightarrow{N}} \overrightarrow{X}(M) = \lim_{S\to M} \frac{1}{S} \oint_C \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\tau} ds$$

Vậy giới hạn (1) chỉ phụ thuộc điểm M trong trường. ***Người ta gọi vecteur $\overrightarrow{X}$ là vecteur rotation hay vecteur xoáy tại M trong trường, ký hiệu:*** $\overrightarrow{X}(M) = rot\overrightarrow{F}(M)$ ***vậy***

$$rot\overrightarrow{F}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \quad (2)$$

và công thức Stokes viết được dưới dạng vecteur:

$$\oint_C \overrightarrow{F}\vec{\tau}\, ds = \iint_S rot\overrightarrow{F}\overrightarrow{N}dS \qquad (3)$$

Công thức này cho ta thấy rằng: Lưu số của trường vecteur $\overrightarrow{F}$ theo một đường cong khép kín C đặt trong trường bằng thông lượng của vecteur rot $\overrightarrow{F}$ qua mặt S giới hạn bởi đường C. Để hiểu rõ ý nghĩa thực tế của rot $\overrightarrow{F}$ ta xét một dòng chất lỏng chảy trong miền nào đó. Tích phân $\oint_C \overrightarrow{F}\vec{\tau}\, ds$ biểu thị công T sinh ra khi đi theo C trong chất lỏng. Nếu rot $\overrightarrow{F}$(M) = 0, và C là một đường cong khép kín bao quanh mặt S khá bé chứa M, thì theo (3) công T khi đi trên C bằng không, điều này chứng tỏ công sản ra khi đi theo phần thuận chiều với dòng chảy bằng công sản ra khi đi theo phần ngược chiều với dòng chảy, ta gọi điểm M là một điểm bình thường. Nếu rot $\overrightarrow{F}$(M) ≠ 0 lý luận tương tự ta thấy hai loại công đó là khác nhau, khi đó điểm M là không bình thường, ta gọi điểm M là một điểm xoáy. Vì lý do đó ta có vecteur rot $\overrightarrow{F}$ hay vecteur xoáy.

Thí dụ: Tìm vecteur rot $\overrightarrow{E}$ của điện trường $\overrightarrow{E} = \dfrac{q\vec{r}}{r^3}$.

Ta có: $P = \dfrac{qx}{r^3}$, $Q = \dfrac{qy}{r^3}$, $R = \dfrac{qz}{r^3}$

Tính: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -qx\dfrac{3}{r^4}r'_y = \dfrac{-3qxy}{r^5}$ $\quad (r'_y = \dfrac{y}{r})$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -qy\dfrac{3}{r^4}r'_x = \dfrac{-3qxy}{r^5}$ $\quad (r'_x = \dfrac{x}{r})$

Vậy $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x},\quad \forall M(x,\ y,\ z) \neq 0$

Tương tự, ta thấy: $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x},\quad \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}$

Vậy tại $\forall M \neq 0$ ta có rot $\vec{E} = 0$, nghĩa là mọi điểm của trường trừ điểm đặt điện tích q đều là điểm bình thường. Theo công thức (3) lưu số dọc theo mọi đường khép kín trong điện trường đều bằng không.

Từ định nghĩa của rot, ta suy ra các tính chất:

1) $rot\,(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}) = rot\,\overrightarrow{F_1} + rot\,\overrightarrow{F_2}$

2) $rot(C\vec{F}) = C\,rot\,\vec{F}$; $C = const$

3) $rot(u\vec{C}) = \overline{grad\ u} \wedge \vec{C}$; $\vec{C} = const$

4) $rot(u\vec{F}) = u\,rot\vec{F} + \overline{grad\ u} \wedge \vec{F}$

Thực vậy, chẳng hạn xét 3) ta có $\vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k}$.

$$C_x, C_y,\ C_z = \text{const (tọa độ của } \vec{C} \text{ trên ba trục)}$$

Khi đó $u\vec{C} = uC_x\vec{i} + uC_y\vec{j} + uC_z\vec{k}$

$$rot(u\vec{C}) = \left(\frac{\partial uC_z}{\partial y} - \frac{\partial uC_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial uC_x}{\partial z} - \frac{\partial uC_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial uC_y}{\partial x} - \frac{\partial uC_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

hay

$$rot(u\vec{C}) = \left(C_z\frac{\partial u}{\partial y} - C_y\frac{\partial u}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(C_x\frac{\partial u}{\partial z} - C_z\frac{\partial u}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(C_y\frac{\partial u}{\partial x} - C_x\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \overline{grad\ u} \wedge \vec{C}$$

Chú ý: Ta có thể dùng ký hiệu hình thức:

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

4.3. Các toán tử vi phân: Đối với trường vô hướng $u = u(x, y, z)$ ta đã định nghĩa:

$$\overrightarrow{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

và đối với trường vecteur $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ ta đã định nghĩa

$$div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Người ta gọi $\overrightarrow{grad}$, div, rot là các toán tử vi phân. Bây giờ ta định nghĩa:

+ Toán tử Laplace: $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ ***là toán tử mà:***

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

+ Toán tử Nabla hay toán tử Hamiton là vecteur tượng trưng

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Áp dụng một cách hình thức các phép toán như đối với vecteur ta có:

$$\vec{\nabla}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}; \quad \vec{\nabla}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Theo định nghĩa của $\overrightarrow{grad}$, div, rot ta có:

$$\vec{\nabla}u = \overrightarrow{\text{grad}}\,u, \quad \vec{\nabla}\vec{F} = div\vec{F}, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = rot\vec{F}$$

do đó người ta thường ký hiệu $\overrightarrow{grad u}$, div $\vec{F}$, rot $\vec{F}$ là $\vec{\nabla}u$, $\vec{\nabla}.\vec{F}$, $\vec{\nabla} \wedge \vec{F}$. Từ định nghĩa ta suy ra các tính chất:

1) div($\overrightarrow{\text{grad}u}$) $= \vec{\nabla}\vec{\nabla}u = \Delta u$, do đó $\vec{\nabla}\vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2 = \Delta$.

2) rot ($\overrightarrow{\text{grad}u}$) $= \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}u = 0$ (tích có hướng của hai vecteur bằng nhau).

3) div(rot $\vec{F}$) $= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) = 0$ (tích hỗn hợp của ba vecteur trong đó có hai vecteur bằng nhau).

4.4. Trường ống và trường thế: Ta đã xét trường $\vec{F}$ một cách tổng quát. Bây giờ ta xét vài trường đặc biệt trong thực tế.

Nếu tại mọi điểm của trường $\vec{F}$ ta có div $\vec{F}$ = 0 thì trường $\vec{F}$ gọi là một trường ống (hay $\vec{F}$ là trường ống nếu trong trường không có nguồn).

Thí dụ: Điện trường $\vec{E} = \dfrac{q\vec{r}}{r^3}$ là trường ống (trừ gốc O); div $\vec{E} = 0$, $\forall M \neq 0$.

Nếu tại mọi điểm của trường $\vec{F}$ mà rot $\vec{F}$ = 0 thì $\vec{F}$ gọi là một trường thế (hay $\vec{F}$ là một trường thế nếu trong trường không có những điểm xoáy).

Thí dụ: Điện trường $\vec{E} = \dfrac{q\vec{r}}{r^3}$ là trường thế (trừ gốc O); rot $\vec{E} = 0$, $\forall M \neq 0$.

Nếu trường $\vec{F}$ vừa là trường ống vừa là trường thế thì $\vec{F}$ gọi là một trường điều hoà.

Thí dụ: Điện trường trên là một trường điều hoà (trừ gốc O).

Vì $\vec{F}$ là trường thế nên rot$\vec{F} = 0$ suy ra $\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = 0$ (tích phân không phụ thuộc đường lấy tích phân) hay $Pdx + Qdy + Rdz$ là vi phân toàn phần của một hàm số u nào đó, nghĩa là $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial u}{\partial z} = R$. Do đó $\vec{F} = \overrightarrow{gradu}$.

Mặt khác $\vec{F}$ lại là trường ống nên div$\vec{F} = 0$ hay

div($\overrightarrow{gradu}$.) = 0. Nhưng div($\overrightarrow{gradu}$.) = Δu. Do đó:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

u gọi là thế vô hướng của trường $\vec{F}$ và phương trình này gọi là phương trình Laplace. Như vậy $\vec{F}$ là trường điều hoà thì thế vô hướng u của trường thoả mãn phương trình Laplace. Thế vô hướng u cũng gọi là một hàm điều hoà.

BÀI TẬP

1. Tính các tích phân đường loại một:

1) $I = \int_C xyds$, C là chu vi của $|x| + |y| = a$ ($a > 0$).

2) $I = \int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, C là đoạn nối $O(0, 0)$ đến $A(1, 2)$.

3) $I = \int_C y^2 ds$, C là cung: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$

4) $I = \int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, C là cung: $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$

5) $I = \int\limits_C (x+y)ds$, C là cung: $r^2 = a^2\cos 2\varphi$; $-\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$.

6) $I = \oint\limits_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})ds$, C là đường $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

7) $I = \int\limits_C zds$, C là cung $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$; $0 \le t \le t_0$.

8) $I = \int\limits_C zds$, C là cung $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = ax$ từ điểm $(0, 0, 0)$ đến $(a, a, a\sqrt{2})$.

9) $I = \oint\limits_C \sqrt{2y^2 + z^2}\,ds$, C là đường tròn $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x = y$.

2.

1*) Tính diện tích phần mặt trụ $y = \dfrac{3}{8}x^2$ giới hạn bởi các mặt phẳng $z = 0$, $x = 0$, $z = x$, $y = 6$.

2) Tính độ dài của cung $x = ae^t\cos t$, $y = ae^t\sin t$, $z = ae^t$ từ điểm $(0, 0, 0)$ đến $(a, 0, a)$.

3) Tính khối lượng của đường $x = a\cos t$, $y = b\sin t$; $0 \le t \le 2\pi$, nếu mật độ khối lượng (dài) của đường là $\gamma(x, y) = |y|$.

4) Tìm toạ độ trọng tâm của:

a) Cung đồng chất: $(\gamma = 1)$ $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$; $0 \le t \le \pi$.

b) Chu vi của tam giác cầu đồng chất: $(\gamma = 1)$ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$

5) Tính moment quán tính đối với các trục toạ độ của cung đồng chất : $(\gamma = 1)$ $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $z = \dfrac{ht}{2\pi}$, $0 \le t \le 2\pi$.

3. Tính các tích phân đường loại hai:

1) $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$; $\overset{\frown}{AB}$: $y = x^2$ nối $A(1, 1)$ đến $B(2, 4)$.

2)) $I = \int\limits_{C} (2a - y)dx + xdy$, C là cung: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

3) $I = \oint\limits_{C} \dfrac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}$, C: $x^2 + y^2 = a^2$, ngược chiều kim đồng hồ.

*4) $I = \oint\limits_{C} \dfrac{xy(ydx - xdy)}{x^2 + y^2}$, C: phần bên phải của $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, ngược chiều kim đồng hồ.

5) $I = \int\limits_{C} \dfrac{dx + dy}{|x| + |y|}$, C: chu vi hình vuông: $A(1, 0)$; $B(0, 1)$; $C(-1, 0)$; $D(0, -1)$.

6) $I = \int\limits_{C} ydx + zdy + xdz$, C: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le 2\pi$ (theo chiều tăng của tham số).

7) $I = \int\limits_{C} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, C: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x\mathrm{tg}\alpha$, ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía x dương.

8) $I = \int\limits_{C} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, C: là chu vi của tam giác cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ theo chiều sao cho phía ngoài của tam giác luôn ở bên trái.

4. Tính các tích phân đường:

1) $I = \oint\limits_{C} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2dy$, C: chu vi của tam giác $A(1, 2)$; $B(2, 2)$; $C(1, 3)$ theo chiều dương.

2) $I = \oint\limits_{C} -x^2ydx + xy^2dy$, C: $x^2 + y^2 = R^2$ ngược chiều kim đồng hồ.

3) $I = \int\limits_C (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy,$

C: nửa trên của $x^2 + y^2 = ax$ từ $A(a, 0)$ đến $O(0, 0)$.

4) $I = \oint\limits_C \frac{dx - dy}{x + y}$, C: chu vi của: $A(1, 0)$; $B(0, 1)$; $C(-1, 0)$; $D(0, -1)$ ngược chiều kim đồng hồ.

5) $I = \int\limits_{(-2,\ 1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$

6) $I = \int\limits_{(1,1)}^{(3,1)} \frac{(x + 2y)dx + ydy}{(x + y)^2}$, C không cắt đường $y = -x$.

7) $I = \int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x\right)dy$

8) $I = \int\limits_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

với $(x_1, y_1, z_1) \in$ mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

$(x_2, y_2, z_2) \in$ mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$. $(a, b > 0)$

9) $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} xydx + yzdy + zxdz$, $\overset{\frown}{AB}$ là cung $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $z = x$, $y > 0$, $R > 0$.

*10) $G = \oint\limits_C \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds$ (Tích phân Gauss)

$r = \sqrt{(x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2}$, $A(\zeta, \eta)$, $M(x, y) \in C$, $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$.

$(\vec{r}, \vec{n})$ góc giữa $\vec{r}$, $\vec{n}$; $\vec{n}$ là pháp tuyến ngoài của C tại M.

5.

1) Tìm u biết:

a) $du = (3x^2 - 2xy + y^2)\,dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy$

b) $du = \dfrac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$

c) $du = \dfrac{(x+y-z)dx + (x+y-z)dy + (x+y+z)dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}$

2) Tính diện tích của hình giới hạn bởi:

a) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$.

b) $x = a(2\cos t - \cos 2t),\ y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

c) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

*d) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^n + \left(\dfrac{y}{b}\right)^n = \left(\dfrac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{n-1}$, $x = 0$, $y = 0$, $(a, b, n > 0)$

6.

1) Tìm công của lực đàn hồi hướng về gốc tọa độ, độ lớn của nó tỷ lệ với khoảng cách từ chất điểm đến gốc tọa độ nếu điểm này vạch một cung ellipse.

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x, y > 0$ theo hướng ngược chiều kim đồng hồ.

2) Tìm công của lực: $|\vec{F}| = \dfrac{k}{r^2}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ tác dụng lên một chất điểm khối lượng m chuyển động từ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ đến $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

7.

1) Xác định $P(x, y)$, $Q(x, y)$ hai lần khả vi liên tục sao cho $I = \oint\limits_C P(x+\alpha, y+\beta)dx + Q(x+\alpha, y+\beta)dy$ không phụ thuộc các hằng số α, β với C khép kín tuỳ ý.

2) Hàm khả vi $f(x, y)$ phải thoả mãn điều kiện nào để $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)(ydx + xdy)$ không phụ thuộc đường nối A, B.

*3) Tìm $\lim_{d\to 0}\frac{1}{S}\oint_C \vec{F}.\vec{n}ds$; S: diện tích miền D, giới hạn bởi C bao quanh điểm (x_0, y_0); d là đường kính của miền D, $\vec{n}$ là pháp tuyến ngoài của C, $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ khả vi liên tục trong miền đóng D.

*4) Dùng công thức Green chứng minh:

a) $\iint_D \Delta u dxdy = \oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta) \text{ vecteur pháp của } C.$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta.$$

b) $\iint_D v.\Delta u dxdy = -\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy + \oint_C v\frac{\partial u}{\partial n} ds$

c) $\iint_D (v.\Delta u - u\Delta v)dxdy = \oint_C \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds$

8. Tính các tích phân mặt:

1) $I = \iint_S (x^2 + y^2)dS$, S là mặt: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2) $I = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2}dS$, S là mặt bên của hình nón:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0,\ 0 \le z \le b.$$

3) $I = \iint_S (xy + yz + zx)dS$

S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ bị cắt bởi mặt $x^2 + y^2 = 2ax$.

4) $I = \iint_S yzdydz + xzdzdx + xydxdy$,

S là phía ngoài tứ diện $x = y = z = 0$, $x + y + z = a$.

5) $I = \iint_S zdxdy$, S: phía ngoài mặt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

6) $I = \iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$

S là phía ngoài của nửa hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$.

7) $I = \iint_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$

S là phía ngoài của mặt nón: $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le h$.

*8) $F(t) = \iint_S f(x,y,z)dS$

$S: x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ với $f(x,y,z) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{nếu } z \ge \sqrt{x^2+y^2} \\ 0 & \text{nếu } z < \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

9.

1) Tìm toạ độ trọng tâm của:

a) Phần mặt đồng chất ($\gamma = 1$): $az = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le a)$.

b) Phần mặt đồng chất ($\gamma = 1$): $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ bị cắt bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = ax$.

2) Tìm moment quán tính đối với gốc tọa độ của các mặt đồng chất ($\gamma = 1$):

a) Mặt toàn phần của hình $a \le x, y, z \le a$.

b) Mặt toàn phần của hình trụ $x^2 + y^2 \le R^2$, $0 \le z \le H$.

*3) Mặt nón cụt đồng chất mật độ khối lượng μ:

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = r$, $0 \le \varphi \le 2\pi$; $0 \le b \le r \le a$, hút một chất điểm khối lượng m đặt tại đỉnh mặt nón đó một lực bằng bao nhiêu ?

10. Áp dụng công thức Stokes tính:

1) $I = \oint\limits_C (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$

C là đường tròn $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$ theo ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía dương của trục Ox.

2) $I = \oint\limits_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$

C là ellipse: $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$ theo ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía dương của trục Ox.

3) $I = \oint\limits_C (y^2+z^2)dx + (z^2+x^2)dy + (x^2+y^2)dz$

C là đường: $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 = 2rx$ $(0 < r < R,\ z > 0)$, theo chiều sao cho phần nhỏ nhất của phía ngoài của mặt cầu giới hạn bởi C là ở bên trái.

4) $I = \oint\limits_C y^2z^2dx + z^2x^2dy + x^2y^2dz$

C là đường khép $x = a\cos t$, $y = b\cos 2t$, $z = a\cos 3t$ theo chiều tăng của tham số t.

11. Áp dụng công thức Ostrogradski tính:

1) $I = \iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$

S phía ngoài của hình lập phương: $0 \le x, y, z \le a$.

2) $I = \iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$

S là phía ngoài của mặt tứ diện giới hạn bởi: $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

3) $I = \iint\limits_S (x-y+z)dydz + (y-z+x)dzdx + (z-x+y)dxdy$

S là phía ngoài của mặt: $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$.

*4) $I(x,y,z) = \iint\limits_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS$ (tích phân Gauss).

S là mặt trơn, kín, giới hạn thể tích V, $\vec{n}$ là pháp tuyến ngoài của S tại $(\xi, \eta, \zeta) \in S$, $\vec{r}$ là vecteur nối điểm (x, y, z) và (ξ, η, ζ).

$$r = \sqrt{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\varsigma)^2}$$

*5) $I(x,y,z) = \iint\limits_S \cos(\vec{n},\vec{l})dS$

S là mặt trơn kín, $\vec{l} = \text{const}$; $\vec{n}$ là pháp tuyến ngoài của S.

12.

1) Xác định mặt mức của các trường vô hướng:

a) $u = f(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

b) $u = f(r)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$

c) $u = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2) Xác định đường dòng của các trường vecteur:

a) $\vec{F}(M) = \vec{C} = \text{const}$

b) $\vec{F}(P) = -wy\vec{i} + wx\vec{j}$, $w = \text{const}$

13. Tính các đạo hàm theo hướng của:

1) $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ tại $M(x, y, z)$ theo hướng của bán kính vecteur $\vec{r}$ của điểm đó.

Khi nào thì $\dfrac{\partial u}{\partial e} = \left|\overrightarrow{\text{grad}}\, u\right|$

2) $u = \dfrac{1}{r}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ theo hướng của $\vec{e}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Khi nào thì $\frac{\partial u}{\partial e} = 0$.

3) $u = xy - z^2$ tại $M(-9, 12, 10)$ theo hướng của phân giác thứ nhất của gốc tọa độ Oxy.

Tính $|\overrightarrow{\text{grad}u}|$ tại M.

14.

1) Cho u $= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ tại điểm nào $\overline{\text{grad}u}$:

a) $\perp Oz$.

b) $||\ Oz$.

c) $= 0$.

2) Cho $u = \ln\frac{1}{r}$, $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ tại điểm nào: $|\overrightarrow{\text{grad}u}| = 1$.

3) Tìm góc giữa $\overline{\text{grad}u}$, $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ tại các điểm $A(1, 2, 2)$, $B(-3, 1, 0)$.

15. Tìm thông lượng của các hàm vecteur:

1) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qua:

a) Mặt toàn phần.

b) Mặt bên của hình trụ $x^2 + y^2 \leq R^2$; $0 \leq z \leq H$.

2) $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + x^3\vec{k}$ qua :

a) Mặt bên

b) Mặt toàn phần của hình nón $\frac{x^2 + y^2}{R^2} \leq \frac{z^2}{H^2}$; $0 \leq z \leq H$

c) Mặt ngoài của $x^2 + y^2 + z^2 \le y$

3) $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ qua mặt cầu: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

4) $\vec{F} = \dfrac{m\vec{r}}{r^3}$, $m = \text{const}$ qua mặt kín S bao quanh gốc tọa độ.

16. Tìm lưu số của các trường:

1) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ theo phần đường $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$; $0 \le t \le 2\pi$ theo chiều tăng của t.

2) $\vec{F} = (y+z)\vec{i} + (z+x)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ dọc theo cung bé nhất của đường tròn lớn nhất của mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ nối các điểm $M(3, 4, 0)$, $N(0, 0, 5)$.

3) $\vec{F} = \overrightarrow{grad}(arctg\,\dfrac{y}{x})$ dọc theo đường C:

a) Không bao quanh Oz.

b) Bao quanh Oz.

17. Các trường sau đây có là trường ống hay là trường thế không, nếu là trường thế tìm hàm thế

1) $\vec{F} = (5x^2y - 4xy)\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j}$

2) $\vec{F} = (y+z)\vec{i} + (z+x)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$

3) $\vec{F} = yz(2x+y+z)\vec{i} + zx(x+2y+z)\vec{j} + xy(x+y+2z)\vec{k}$

4) $\vec{F} = f(r)\vec{r}$ (lực xuyên tâm).

18. Chứng minh các công thức:

1) $\vec{\nabla}^2(u, v) = u\vec{\nabla}^2 v + v\vec{\nabla}^2 u + 2\vec{\nabla}u\vec{\nabla}v \quad (\vec{\nabla}^2 = \Delta)$

2) $\text{div}(u\,\overrightarrow{gradu}) = |\overrightarrow{gradu}|^2 + u\Delta u$.

3) $\text{div}(u\,\overrightarrow{gradv}) = \overrightarrow{gradu}.\overrightarrow{gradv} + u\Delta v$

*4) $div(\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2) = \vec{F}_2 rot\vec{F}_1 - \vec{F}_1 rot\vec{F}_2$

*5) $rot(\vec{C} \wedge \vec{F}) = \vec{C} div\vec{F} - (\vec{C}, \vec{\nabla})\vec{F}, \quad \vec{C} = const$

*6) $rot(\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2) = (\vec{F}_2, \vec{\nabla})\vec{F}_1 - \vec{F}_2 div\vec{F}_1 + \vec{F}_1 div\vec{F}_2 - (\vec{F}_1, \vec{\nabla})\vec{F}_2$.

TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP

1.

1) 0.

2) $\ln\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$

3) $\dfrac{256}{15}a^3$

4) $\dfrac{a^2}{3}[(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1]$

5) $a^2\sqrt{2}$

6) $4a^{\frac{7}{3}}$

7) $\dfrac{1}{3}[(t_0^2+2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}]$

8) $\dfrac{a^2}{256\sqrt{2}}(100\sqrt{38} - 72 - 17\ln\dfrac{25+4\sqrt{38}}{17})$

9) $2\pi a^2$

2.

1) $\dfrac{16}{27}(10\sqrt{10}-1)$. $(S = \int\limits_C xds$, C là $y = \dfrac{3}{8}x^2$ nối (0, 0) và (4, 6)

2) $a\sqrt{3}$

3) $2(b^2 + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a})$

4)

a) $\left(\frac{4a}{3}, \frac{4a}{3}\right)$

b) $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}\right)$

5) $I_x = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right)\sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2}$

$I_y = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right)\sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2}$

$I_z = a^2\sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2}$

3.

1) $40\frac{19}{30}$, 2) $-2\pi a^2$, 3) -2π, 4) 0

5) 0, 6) $-\pi a^2$, 7) $2\sqrt{2}\pi a^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, 8) -4.

4.

1) $-\frac{4}{3}$

2) $\frac{\pi R^4}{2}$

3) $\frac{m\pi a^2}{8}$

4) -4 không thể áp dụng công thức Green.

5) 62

6) $\dfrac{1}{4} + \ln 2$

7) $1 + \sqrt{2}$

8) $b \quad a$

9) $\left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{\pi\sqrt{2}}{16}\right)R^3$

10) 2π: với A trong C; π; với A ở ngoài C.

5.

1)

a) $x^3 \quad x^2y + xy^2 - y^3 + C$

b) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\, arctg \dfrac{3x - y}{2\sqrt{2}y} + C$

c) $\ln\sqrt{(x+y)^2 + z^2} + arctg\, \dfrac{z}{x+y} + C$

2)

a) $\dfrac{3\pi a^2}{8}$

b) $6\pi a^2$

c) $\dfrac{3a^2}{2}$,(đặt $y = tx$)

d) $\dfrac{ab}{n}\left(1 + (1 - \dfrac{1}{n})\right)\dfrac{\pi}{\sin\dfrac{\pi}{n}}$

(Đặt $x = a\cos^{\frac{2}{n}}\varphi,\quad y = \sin^{\frac{2}{n}}\varphi;\quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$).

6.

1) $-\dfrac{K}{2}(b^2-a^2)$, K là hệ số tỷ lệ

2) $K\left(\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{1}{r_1}\right)$, $r_i=\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2}$, i = 1, 2.

7.

1) $P=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\varphi(x)$; $\quad Q=Cx+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\psi(y)$

$u(x, y), \varphi(x), \psi(y)$: hai lần khả vi liên tục.

2) $\dfrac{\partial}{\partial x}(xf)=\dfrac{\partial}{\partial y}(yf)$ trong miền đóng D giới hạn bởi $AmBnA$

3) $\dfrac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x}=\dfrac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial y}$, với $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}$ $\quad (\oint\limits_C \vec{F}\vec{n}ds=\oint\limits_C -Qdx+Pdy)$

4) Đặt $P=V\dfrac{\partial u}{\partial x}$; $\quad Q=V\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ta có b); a) là đặc biệt của b) với V = 1.

8.

1) $\dfrac{8\pi a^4}{3}$

2) $\dfrac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$

3) $\dfrac{64\sqrt{2}a^4}{15}$

4) 0

5) $\dfrac{4}{3}\pi abc$

6) $\dfrac{\pi a^4}{2}$

7) 0

8) $\dfrac{\pi}{6}t^4(8-5\sqrt{2})\left(F(t)=|t|\iint\limits_D \dfrac{(x^2+y^2)dxdy}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}},\ D: x^2+y^2 \le \dfrac{t^2}{2}\right)$

9.

1)

a) $x_0=0,\ y_0=0,\ z_0=\dfrac{25\sqrt{5}+1}{10(5\sqrt{5}-1)}a$

b) $x_0=\dfrac{a}{2},\ y_0=0,\ z_0=\dfrac{16a}{9\pi}$

2)

a) $I_0=40a^4$

b) $I_0=\pi R[R(R+H)^2+\dfrac{2}{3}H^3]$

3) $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$, $P=0,\ Q=0,\ R=\quad m\ \ln\dfrac{a}{b}$, $d\vec{F}(M)=\dfrac{\gamma\mu m dS}{r^2}\vec{e}$

$\vec{r}=\overrightarrow{OM},\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \vec{e}=\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

10.

1) 0

2) -4π

3) $2\pi Rr^2$

4) 0

11.

1) $3a^4$

2) $\dfrac{a^3}{2}$

3) 1

4) 0: S không bao quanh điểm (x, y, z)

4π; S bao quanh điểm (x, y, z)

$\left(\cos(\bar{r}, \bar{n}) = \dfrac{\bar{r}\bar{n}}{r}\right)$

5) 0

12.

1)

a) Mặt cầu

b) Mặt trụ

c) Mặt nón

2)

a) Các đường thẳng song song với $\vec{C}$

b) Các đường tròn: $x^2 + y^2 = C_1^2$, $z = C_2$

13.

1) $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{2u}{r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial r} = |\overrightarrow{gradu}|$ khi $a = b = c$

2) $\dfrac{\partial u}{\partial e} = -\dfrac{\cos(\bar{e}, \bar{r})}{r^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial e} = 0$ khi $\bar{e} \perp \bar{r}$

3) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial e}\right|_M = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $|\overrightarrow{gradu}|_M = 25$

14.

1)

a) $z^2 = xy$, b) $x = y = z$, c) $x = y = z$

2) $r = 1$

3) $\cos\varphi = -\dfrac{8}{9}$

15.

1)

a) $3\pi R^2 H$, b) $2\pi R^2 H$,

2)

a) $\dfrac{1}{10}\pi R^2 H(3R^2 - 4H^2)$, b) $\dfrac{3}{10}\pi R^2 H(R^2 + 2H^2)$,

c) $\dfrac{\pi}{5}$,

3) $\dfrac{8}{3}\pi R^3(a + b + c)$

4) $4\pi m$

16.

1) $2\pi^2 b^2$, 2) -12,

3)

a) 0

b) $2\pi n$; n: số lần đi khắp C quanh Oz

17.

1) Không là trường ống cũng không phải là trường thế

2) Là trường ống và là trường thế:

$$u = xy + yz + zx + C$$

3) Không là trường ống, là trường thế

$$u = xyz(x + y + z) + C$$

Chương 12

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

§1. KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Các bài toán mở đầu

Trong bài tích phân bất định ta đã giải bài toán: Tìm một hàm số $F(x)$ trong một miền nào đó, biết đạo hàm của nó: $F'(x) = f(x)$ trong miền đó (bài toán tìm nguyên hàm).

Trong bài này ta sẽ xét bài toán tổng quát hơn: Tìm hàm số $y = y(x)$, biết hàm số đó, đạo hàm của nó và biến độc lập x liên hệ với nhau bởi một phương trình nào đó.

Nhiều bài toán trong khoa học kỹ thuật đưa đến việc giải bài toán này, chẳng hạn:

1) Tìm quy luật chuyển động của một vật khối lượng m rơi từ một độ cao nào đó, biết rằng lực cản của không khí tỷ lệ với vận tốc rơi.

Gọi $s = s(t)$ (t là thời gian) là quy luật chuyển động thì theo định luật Newton và ý nghĩa cơ học của đạo hàm ta có phương trình để tìm s:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - \frac{Kds}{dt} \qquad (1)$$

trong đó g là gia tốc trọng trường, K là hệ số tỷ lệ đặc biệt nếu $K = 0$ (sức cản của không khí không đáng kể) thì ta có: $s'' = g$, gọi là phương trình của quy luật rơi tự do.

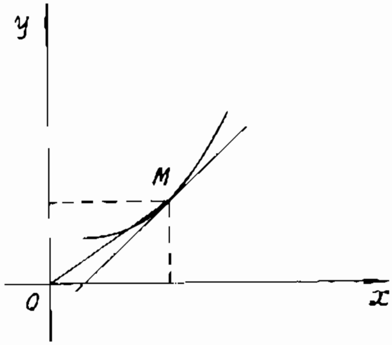
2) Tìm quy luật phân huỷ của radium biết rằng tốc độ phân huỷ của nó tỷ lệ với lượng radium hiện có.

Gọi quy luật phải tìm là $R = R(t)$ (t là thời gian) thì theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm và theo giả thiết ta có phương trình để xác định R là:

$$\frac{dR}{dt} = KR \qquad (2)$$

trong đó K là hệ số tỷ lệ.

3) Tìm một đường cong trong mặt phẳng biết rằng hệ số góc của tiếp tuyến tại một điểm bất kỳ của đường cong bằng hai lần hệ số góc của đường thẳng nối gốc toạ độ và tiếp điểm.



Hình 179

Gọi $y = y(x)$ là phương trình đường cong phải tìm thì theo ý nghĩa hình học của đạo hàm và theo giả thiết ta có phương trình để xác định $y(x)$: (H.179)

$$y' = 2\,\frac{y}{x} \qquad (3)$$

Các phương trình (1), (2), (3) vừa lập gọi là các phương trình vi phân. Các hàm phải tìm $s(t)$, $R(t)$, $y(x)$ gọi là ẩn hàm trong các phương trình đó.

1.2. Định nghĩa phương trình vi phân

Phương trình vi phân là phương trình liên hệ giữa các biến độc lập, hàm phải tìm và đạo hàm hay vi phân của hàm phải tìm.

Nếu hàm phải tìm là hàm một biến thì phương trình gọi là phương trình vi phân thường hay gọi tắt là phương trình vi phân.

Nếu hàm phải tìm là hàm n biến độc lập ($n \geq 2$) thì phương trình vi phân gọi là phương trình vi phân đạo hàm riêng hay gọi tắt là phương trình đạo hàm riêng.

Trong chương này ta chỉ xét phương trình vi phân (thường).

Ta gọi cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm có mặt trong phương trình.

Thí dụ: Các phương trình (1), (2), (3) ở 1.1 là các phương trình cấp 2, 1, 1.

Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp n là:

$$F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$$

Ta gọi nghiệm của phương trình vi phân là một hàm số $y = y(x)$, $x \in X$: khi thay vào phương trình ta được một đồng nhất thức. Mỗi nghiệm của phương trình vi phân ứng một đường cong gọi là đường cong tích phân của phương trình vi phân.

Thí dụ: Xét phương trình (3) đã lập ở 1.1: $y' = \dfrac{2y}{x}$

Rõ ràng hàm $y = x^2$ là nghiệm của phương trình này vì $y' = 2x$. Thay vào phương trình ta có:

$$2x = \frac{2x^2}{x} \quad (x \neq 0)$$

Tổng quát : $y = cx^2$, c = const, tuỳ ý cũng là nghiệm của phương trình này, vậy phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc một hằng số tuỳ ý.

Bài toán tìm nghiệm của phương trình vi phân gọi là giải phương trình đó, việc giải này thường dùng phép tích phân bất định nên việc giải phương trình vi phân cũng gọi là phép lấy tích phân phương trình vi phân.

1.3. Bài toán Cauchy- Nghiệm riêng, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp một

Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp một là:

$F(x, y, y') = 0$, hay nếu giải ra ta được đối với y':

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

Ở 1.2 ta biết phương trình $y' = \dfrac{2y}{x}$ có vô số nghiệm cho bởi: $y = cx^2$ với c = const tuỳ ý. Vậy muốn có một nghiệm xác định hay một đường cong xác định ta phải cho bổ sung một điều kiện nào đó chẳng hạn điều kiện khi $x = 1$ thì $y = 1$ (đường cong qua điểm (1, 1)) khi đó $1 = c\cdot 1^2$ hay $c = 1$. Vậy ta có nghiệm xác định $y = x^2$ của phương trình đó.

Tổng quát:

Để giải phương trình (1) ta phải thêm một điều kiện bổ sung, chẳng hạn điều kiện khi $x = x_0$ thì $y = y_0$, ký hiệu:

$$y(x_0) = y_0 \text{ hay } y\big|_{x=x_0} = y_0 \tag{2}$$

gọi là điều kiện ban đầu, sơ kiện hay điều kiện Cauchy.

Bài toán tìm nghiệm phương trình vi phân (1) thoả mãn điều kiện (2) gọi là bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân cấp 1.

Một vấn đề lớn đặt ra: Khi nào bài toán Cauchy có nghiệm hay tồn tại nghiệm và khi nào nghiệm đó là duy nhất . Để trả lời, ta có:

Định lý tồn tại và duy nhất: ***Nếu hàm $f(x, y)$ liên tục trong miền có chứa điểm (x_0, y_0) thì phương trình (1) tồn tại một nghiệm $y = y(x)$ trong lân cận của điểm x_0 thoả mãn sơ kiện (2), nghĩa là khi $x = x_0$ thì $y = y_0$, hơn nữa nếu $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ cũng liên tục tại đó thì nghiệm này là duy nhất.***

Ta công nhận định lý này vì chứng minh vượt ra ngoài phạm vi giáo trình này

Thí dụ: Bài toán Cauchy đối với phương trình $y' = \dfrac{2y}{x}$ có nghiệm duy nhất tại các điểm $f(x, y) = \dfrac{2y}{x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2}{x}$ liên tục, nghĩa là tại mọi điểm trong mặt phẳng trừ gốc toạ độ $x = 0, y = 0$ và trục Oy: $x = 0$

Chẳng hạn tại (1, 1) theo thí dụ trên, nghiệm duy nhất của bài toán là $y = x^2$.

Về hình học, định lý có thể phát biểu: nếu $f(x, y)$ và $f'_y(x, y)$ liên tục trong miền có chứa điểm (x_0, y_0) thì có một đường cong tích phân duy nhất của phương trình qua điểm (x_0, y_0).

Nghiệm của bài toán Cauchy gọi là nghiệm riêng của phương trình vi phân.

Nghiệm của phương trình (1) phụ thuộc hằng số tuỳ ý c: y = y(x, c) mà từ sơ kiện (2) ta xác định được c duy nhất để có nghiệm riêng gọi là nghiệm tổng quát của phương trình đó. Nếu x, y, c có liên hệ:

$$\varphi(x, y, c) = 0$$

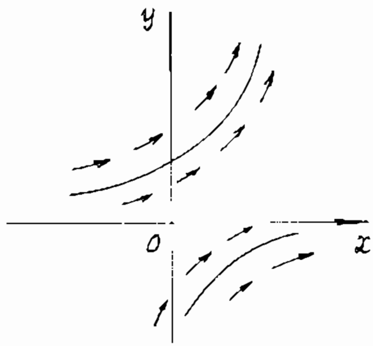
thì hệ thức này gọi là tích phân tổng quát của phương trình. Về hình học nghiệm tổng quát hay tích phân tổng quát biểu diễn một họ đường cong phụ thuộc một tham số c. Khi $c = c_0$ thì $\varphi(x, y, c_0)$ gọi là một tích phân riêng của (1).

Thí dụ: Theo trên thì $y = x^2$ và $y = cx^2$ $(x \neq 0)$ là nghiệm riêng và nghiệm tổng quát của phương trình $y' = \dfrac{2y}{x}$ ở đây nghiệm tổng quát biểu diễn một họ parabole qua gốc O (trừ điểm O), trục là Oy.

Chú ý:

Phương trình (1) cho sự liên hệ giữa hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong tích phân tại một điểm của nó và các tọa độ của điểm đó, như vậy ta có thể dựng được các điểm của đường cong tích phân cùng với hướng của tiếp tuyến với đường cong tích phân trong miền tồn tại của nghiệm phương trình. Tập hợp các tiếp tuyến đó gọi là ***trường hướng của phương trình vi phân*** (1), biết được trường hướng của phương trình vi phân (1) trong một miền nào đó ta có thể dựng được gần đúng đường cong tích phân của phương trình đi qua các điểm nào đó của miền

Thí dụ: (H.180) cho trường hướng của phương trình $y' = y^2$.



Hình 180

1.4. Điểm và nghiệm bất thường (kỳ dị)

Xét phương trình vi phân cấp một

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

giả sử $D \subset R^2$ là miền xác định của $f(x, y)$.

Điểm $(x_0, y_0) \in D$ gọi là điểm bất thường hay điểm kỳ dị của phương trình (1) nếu phương trình không có nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $y|_{x=x_0} = y_0$ hay phương trình có ít nhất hai nghiệm phân biệt trong lân cận của điểm x_0 cùng thoả mãn điều kiện ban đầu trên.

Rõ ràng điểm (x_0, y_0) là một điểm kỳ dị của phương trình (1) thì cần là: điều kiện của định lý tồn tại và duy nhất nghiệm không thoả mãn trong lân cận của điểm đó, đặc biệt nếu $f(x, y)$ liên tục và $\frac{\partial f}{\partial y}$ không bị chặn tại lân cận đó.

Nghiệm của phương trình (1) gọi là nghiệm bất thường hay kỳ dị của nó nếu mỗi điểm của đường cong tích phân tương ứng là một điểm bất thường của phương trình.

Rõ ràng nếu $\varphi(x, y, c) = 0$ (2) là tích phân tổng quát của phương trình (1) và họ (2) có hình bao thì ***hình bao này tương ứng một nghiệm bất thường của phương trình .***

Nếu $f(x,y) = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$; $P(x, y)$, $Q(x, y)$ là các đa thức của x, y thì phương trình (1) không có nghiệm bất thường (?), nó chỉ có thể có điểm bất thường (x_0, y_0) mà $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$.

Thí dụ: Xét $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ (a) thử trực tiếp ta thấy $y = (x - c)^3$ (b) là nghiệm tổng quát của (a). Hình bao của họ (a) được xác định từ hệ:

$$\begin{cases} \varphi(x,y,c) = y - (x-c)^3 = 0 \\ \varphi'_c(x,y,c) = 3(x-c)^2 = 0 \end{cases}$$

Khử c ta có $y = 0$, vì họ (b) không có điểm bất thường nên $y = 0$ là hình bao của họ (b) và nó là một nghiệm bất thường của phương trình (a).

§2. MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT CỦA PHƯƠNG TRÌNH CẤP I: y' = f(x, y)

2.1. Phương trình biến số phân ly

Phương trình biến số phân ly là phương trình có dạng

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (1)$$

Trong đó M(x) chỉ là hàm số của x, N(y) chỉ là hàm số của y.

Cách giải: Để giải (1) giả sử $y = y(x)$ là nghiệm của (1), thay vào (1) ta có đồng nhất thức:

$$M(x)dx + N[y(x)]y'dx = 0$$

Tích phân cả 2 vế ta có:

$$\int M(x)dx + \int N[y(x)]y'\,dx = C$$

nhưng $\qquad \int N[y(x)]y'\,dx = \int N(y)dy$

Do đó: $\qquad \int M(x)dx + \int N(y)dy = C$

là tích phân tổng quát của phương trình (1).

Thí dụ:

1) Giải: $\qquad (2x + \cos x)dx + 5y^4dy = 0$

Tích phân 2 vế ta có: $x^2 + \sin x + y^5 = C$ là tích phân tổng quát của phương trình, suy ra $y = \sqrt[5]{c - x^2 - \sin x}$ là nghiệm tổng quát của phương trình.

2) Giải: $y' = \dfrac{2y}{x}$

Vì $y' = \dfrac{dy}{dx}$ nên $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x}$ hay $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{2dx}{x}$ $(x, y \neq 0)$

Tích phân 2 vế ta có $\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|$ ($C = \text{const} \neq 0$ thì $\ln|C|$ = const bất kỳ).

Do đó $y = Cx^2$ $(C \neq 0, x \neq 0)$ là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho. Phương trình đã cho có thể viết: $2ydx - xdy = 0$. Do đó ta thấy phương trình còn có nghiệm $y = 0$ $(x \neq 0)$, $x = 0$ $(y \neq 0)$ (nghiệm riêng).

Nghiệm $y = 0$ $(x \neq 0)$ có thể để trong nghiệm tổng quát với $C = 0$.

Vậy họ đường cong tích phân của phương trình là họ paraboles $y = Cx^2$ $(x \neq 0)$ và trục Oy (trừ điểm O): $x = 0$ $(y \neq 0)$. Điểm $(0, 0)$ là điểm bất thường của phương trình (H.181). Phương trình không có nghiệm bất thường.

3) Giải bài toán tìm quy luật phân huỷ của radium cho biết lượng radium ban đầu $R\big|_{t=0} = R_0$, và xác định hệ số tỷ lệ K nếu cho biết: 1g radium sau 26,7 phút phân huỷ còn 0,5g.

Ta biết phương trình xác định quy luật phân huỷ của radium $R = R(t)$ là $\dfrac{dR}{dt} = KR$ (1.1). Do đó :

$\frac{dR}{R} = Kdt$, tích phân 2 vế ta có:

$$\ln|R| = Kt + \ln|C| \quad (C \neq 0)$$

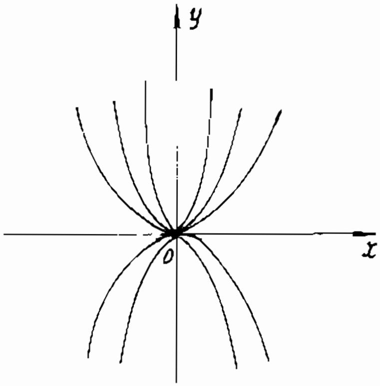
hay $R = C.e^{Kt}$

Cho thoả mãn sơ kiện ta có:

$R_0 = C e^{K.0}$ hay $C = R_0$.

Vậy ta có qui luật:

$R = R_0.e^{Kt}$ (a)



Hình 181

Bây giờ ta xác định K. Theo giả thiết và theo (a) ta có:

$$0,5 = 1.e^{K.26,7} \text{ hay } K = \frac{-\ln 2}{26,7} \approx -0,026$$

vậy $R = R_0.e^{-0,026t}$, suy ra $t \to \infty$ thì $R \to 0$. Nhưng thực tế không có $t \to \infty$ nên lượng radium không bao giờ phân huỷ hết.

Chú ý:

Phương trình dạng: $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ đưa được về phương trình biến số phân ly. Thực vậy chia 2 vế cho $N_1(y).M_2(x)$ với giả thiết $N_1(y).M_2(x) \neq 0$. Ta có:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy = 0$$

chính là phương trình dạng biến số phân ly.

Thí dụ: Giải $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$. Chia 2 vế cho

$(y^2 - 1)(x^2 - 1)$ với giả thiết $x \neq \pm 1, y \neq \pm 1$. Ta có:

$$\frac{xdx}{x^2-1}+\frac{ydy}{y^2-1}=0 \quad \text{hay} \quad \frac{2xdx}{x^2-1}+\frac{2ydy}{y^2-1}=0$$

Tích phân ta có:

$$\ln|x^2-1|+\ln|y^2-1|=\ln|C|\ C\neq 0 \text{ hay } (x^2-1)(y^2-1)=C$$

là tích phân tổng quát của phương trình. Rõ ràng $x=\pm 1$, $y=\pm 1$ cũng là các nghiệm của phương trình (nghiệm riêng). Phương trình không có nghiệm bất thường

2.2. Phương trình đẳng cấp

Phương trình y' = f(x, y) (1) gọi là phương trình đẳng cấp đối với x, y nếu hàm f(x, y) là hàm đẳng cấp bậc không đối với x, y (hàm $f(x, y)$ gọi là đẳng cấp bậc n đối với x, y nếu $\forall\lambda\in R$, $\lambda\neq 0$: $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$; bậc không: $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^0 f(x,y)=f(x,y)$, $\lambda\neq 0$).

Thí dụ:

1) Phương trình $xy'=xe^{\frac{y}{x}}+y$ là phương trình đẳng cấp, vì với $x\neq 0$, $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$, ở đây

$$f(x,y)=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x},\ f(\lambda x,\lambda y)=e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}+\frac{\lambda y}{\lambda x}=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}=f(x,y),\ (\lambda\neq 0)$$

2) Phương trình

$$y'=\frac{2xydx}{x^2-y^2}$$

là phương trình đẳng cấp vì

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{2\lambda^2 xydx}{\lambda^2(x^2-y^2)}=\frac{2xydx}{x^2-y^2}=f(x,y)\ (\lambda\neq 0)$$

Nếu $y' = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, trong đó P($x$, y), $Q(x, y)$ là các đa thức đẳng cấp cùng bậc của x, y (các số hạng của chúng cùng bậc) thì phương trình này là phương trình vi phân đẳng cấp.

Cách giải. Xét phương trình đẳng cấp (1) theo định nghĩa:

$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$, đặt $\lambda = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ thì (1) có dạng:

$$y' = f(1, \frac{y}{x}) = \varphi(\frac{y}{x}) \qquad (2)$$

Đặt $u = \dfrac{y}{x}$ thì $y = xu$, $y' = u + x\dfrac{du}{dx}$ và (2) viết được:

$$u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u) \qquad (3)$$

hay

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x} \text{ với } \varphi(u) - u \neq 0$$

Đây là phương trình biến số phân ly đã biết cách giải.

Nếu $\varphi(u) - u \equiv 0$ hay $\varphi(u) \equiv u$, khi đó (2) viết được: $y' = u$ hay $y' = \dfrac{y}{x}$, đây cũng là phương trình biến số phân ly đã biết cách giải.

Nếu $\varphi(u) - u = 0$ tại u_0 thì hàm $u = u_0$ là nghiệm của (3), và $y = u_0 x$ là nghiệm của (1).

Thí dụ:

1) Giải $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$, đặt $\dfrac{y}{x} = u$, $x \neq 0$ ta có $u + x\dfrac{du}{dx} = e^u + u$ hay

$e^{-u}\,du = \dfrac{dx}{x}$. Do đó $-e^{-u} = \ln|x| + C$ hay $\ln|x| + e^{\frac{-y}{x}} + C = 0$ là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

2) Giải $y' = \dfrac{2xydx}{x^2 - y^2}$, theo trên đây là phương trình đẳng cấp, đặt $\dfrac{y}{x} = u$, $x \neq 0$, ta có:

$$x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1-u^2} - u = \frac{u(u^2+1)}{1-u^2}$$

hay

$$\frac{(1-u^2)du}{u(u^2+1)} = \frac{dx}{x}, \quad u \neq 0$$

Do đó:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u} - \frac{2udu}{1+u^2} \qquad \left(\frac{1-u^2}{u(1+u^2)} = \frac{1}{u} - \frac{2u}{1+u^2}\right)$$

Tích phân ta được: $\ln|x| = \ln|u| - \ln(1+u^2) + \ln|C|$, $C \neq 0$, hay $\dfrac{x(1+u^2)}{u} = C$. Trở lại $u = \dfrac{y}{x}$, ta có: $x^2 + y^2 - Cy = 0$. $C \neq 0$, là tích phân tổng quát của phương trình, nó biểu thị một họ đường tròn tâm trên trục Oy, qua gốc O trừ điểm O là điểm bất thường của phương trình. Phương trình đã cho có thể viết $(x^2 - y^2)y' = 2xy$, ta thấy $y = 0$ $(x \neq 0)$ cũng là nghiệm của phương trình (nghiệm riêng) ứng với $u = 0$ (ở trên ta đã giả thiết $u \neq 0$), phương trình không có nghiệm bất thường.

Chú ý: ***Phương trình có dạng***

$$y' = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$$

có thể đưa về phương trình đẳng cấp.

Thí dụ: Giải phương trình:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y-1}$$

Ta đổi biến số $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$.

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + h + k - 3}{x_1 - y_1 + h - k - 1}$$

Ta buộc h, k thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} h + k - 3 = 0 \\ h - k - 1 = 0 \end{cases}$$

nghĩa là $h = 2$, $k = 1$. Khi đó ta có phương trình

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$$

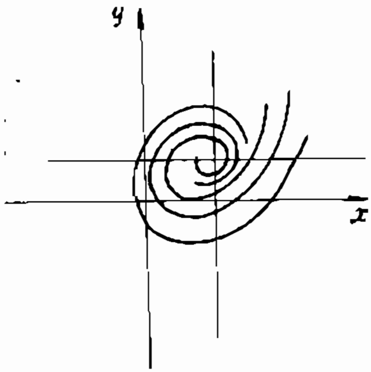
Đây là một phương trình đẳng cấp, giải phương trình này ta có tích phân tổng quát của nó là:

$$C\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{arctg\frac{y_1}{x_1}} \qquad (C \neq 0)$$

Trở lại biến số cũ ta có tích phân tổng quát của phương trình đã cho là:

$$C\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{arctg\frac{y-1}{x-2}}$$

Chuyển sang tọa độ cực $x - 2 = r\cos\varphi$, $y - 1 = r\sin\varphi$. Ta có $cr = e^{\varphi}$. $(C \neq 0)$). Đây là họ đường xoắn ốc logarithme (H.182).



Hình 182

2.3. Phương trình tuyến tính: ***Phương trình vi phân tuyến tính cấp một là phương trình có dạng: $y' + P(x).y = Q(x)$ (1) tức là một phương trình bậc nhất đối với y và y'.***

Giả sử $P(x)$, $Q(x)$ là các hàm liên tục của x trong miền X. Nếu $Q(x) \equiv 0$ thì: $y' + P(x)y = 0$ (1') gọi là phương trình tuyến tính thuần

nhất. Nếu $Q(x)\neq 0$ thì phương trình gọi là tuyến tính không thuần nhất. (1') cũng gọi là phương trình thuần nhất tương ứng của (1).

Thí dụ:

$$y' - \frac{2}{x+1}.y = (x+1)^3, \qquad \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$$

là các phương trình tuyến tính. Còn

$$y' + e^x y^2 = x^3, \; y'^3 + xy = e^x$$

không phải là phương trình tuyến tính vì y, y' không phải ở bậc nhất.

Cách giải: Đầu tiên, ta giải phương trình thuần nhất tương ứng (1') của (1): $y' + P(x)y = 0$, ta viết phương trình này dưới dạng:

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y \quad \text{hay} \quad \frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

đây là phương trình biến số phân ly. Tích phân ta có:

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C| \quad (C \neq 0) \quad hay \quad y = Ce^{\int P(x)dx} \quad (C \neq 0) \quad (2)$$

Rõ ràng $y \equiv 0$ là một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất (1'), nó ứng với $C = 0$ trong (2). Theo giả thiết thì (1') không có nghiệm bất thường trong miền X. Vậy mọi nghiệm của phương trình thuần nhất (1') được xác định bởi công thức (2), $\forall C \in R$. Đó là nghiệm tổng quát của phương trình ấy.

Bây giờ ta chuyển sang giải phương trình không thuần nhất (1). Ta tìm nghiệm của nó dưới dạng $y = u.v$, $u = u(x)$, $v = v(x)$. Lúc đó $y' = u'v + uv'$.

Thay vào (1) ta được:

$$u'v + uv' + Puv = Q \quad \text{hay} \quad u'v + u(v' + Pv) = Q \qquad (3)$$

Nếu chọn v là một nghiệm ($\neq 0$) của phương trình thuần nhất (1') thì: $v' + Pv = 0$, ta sẽ chọn $v = e^{-\int P(x)dx}$ (cho $C = 1$ trong (2) lúc đó (3) viết được: $u'v = Q$ hay $u' = Q\,e^{-\int P(x)dx}$.

Suy ra $\quad u = \int Q.e^{\int P(x)dx}dx + C$

do đó $y = u.v = (\int Q.e^{\int P(x)dx}dx + C)\, e^{-\int Pdx}$ ***(4) là nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất*** (1).

Tóm lại: ***Muốn giải phương trình thuần nhất (1) đầu tiên giải phương trình (1') lấy một nghiệm riêng $v = e^{-\int P(x)dx}$ rồi tìm nghiệm của (1) dưới dạng y = u. v đạo hàm thay vào (1) ta được phương trình xác định u, giải ta có u và do đó ta có y.***

Ta cũng có thể áp dụng công thức (4) để có nghiệm ngay (nếu nhớ).

Thí dụ:

1) $\quad y' - \dfrac{2}{x+1}y = (x+1)^3, \quad (x \neq -1)$

đầu tiên giải: $v' - \dfrac{2}{x+1}v = 0$ ta có $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{2dx}{x+1}$.

Suy ra $\ln|v| = 2\ln|x+1| + \ln|C|$ hay $v = C(x+1)^2$. Lấy $v = (x+1)^2$, đặt $y = uv = u(x+1)^2$ thì $y' = u'(x+1)^2 + 2u(x+1)$, thay vào phương trình ta có:

$$u'(x+1)^2 + 2u(x+1) - \frac{2}{x+1}u(x+1)^2 = (x+1)^3.$$

hay $u' = x+1$ $(x \neq -1)$ suy ra $u = \dfrac{(x+1)^2}{2} + C$. Do đó

$$y = \left(\frac{(x+1)^2}{2} + C\right)(x+1)^2 = C(x+1)^2 + \frac{(x+1)^4}{2}$$

2) Giải $\quad \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{\sin x}{x}$ với sơ kiện $y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$

Ta sẽ áp dụng công thức (4): $P = \dfrac{1}{x}$, $Q = \dfrac{\sin x}{x}$ ta có:

$$\int Pdx = \int\frac{dx}{x} = \ln|x|; \quad v = e^{-\int Pdx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$Qe^{\int Pdx} = \frac{\sin x}{x} e^{\ln|x|} = \sin x$$

$$\int Qe^{\int Pdx} dx = \int \sin x dx = -\cos x + C$$

Do đó:

$$y = uv = (-\cos x + C)\frac{1}{x} = \frac{C}{x} - \frac{\cos x}{x} \quad (x \neq 0)$$

cho thoả mãn sơ kiện $y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{C}{\frac{\pi}{2}} - \frac{0}{\frac{\pi}{2}}$ suy ra $C = 0$.

Vậy ta có nghiệm riêng $y = \frac{-\cos x}{x}$.

3) Xác định quy luật biến thiên của vận tốc theo thời gian $v = v(t)$ của một chất điểm khối lượng m chuyển động thẳng dưới tác dụng của một lực có độ lớn tỷ lệ với thời gian chuyển động, hệ số tỷ lệ k_1, kể từ lúc $v\big|_{t=0} = 0$, ngoài ra chất điểm còn chịu lực cản của môi trường có độ lớn tỷ lệ với vận tốc chuyển động, hệ số tỷ lệ là k. Áp dụng định luật Newton ta có phương trình:

$$m\frac{dv}{dt} = k_1 t - kv \quad hay \quad \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = \frac{k_1}{m}t$$ để xác định vận tốc $v = v(t)$.

Đặt: $\frac{k}{m} = a$, $\frac{k_1}{m} = b$, ta có: $\frac{dv}{dt} + av = bt$.

Đó là một phương trình tuyến tính cấp một.

Giải phương trình thuần nhất $\frac{dv_1}{dt} + av_1 = 0 \Rightarrow \frac{dv_1}{v_1} = -adt$. $\quad v_1 = Ce^{-at}$.

Lấy $v_1 = e^{-at}$, theo cách giải tổng quát, nghiệm của phương trình không thuần nhất là: $v = u.\, e^{-at}$.

Với u là nghiệm của: $u' = \frac{Q}{v_1} = bte^{at}$, do đó:

$$u = b\left(\frac{te^{at}}{a} - \int \frac{e^{at}}{a}dt\right) = \frac{b}{a}t.e^{at} - \frac{b}{a^2}.e^{at} + C$$

và

$$v = \left[\frac{b}{a}(t - \frac{1}{a})e^{at} + C\right]e^{-at}$$

hay

$$v = \frac{b}{a}(t - \frac{1}{a}) + Ce^{-at}$$

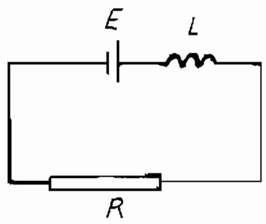
cho thoả mãn điều kiện $v\big|_{t=0} = 0$ ta có: $0 = \frac{-b}{a^2} + C$ *hay* $C = \frac{b}{a^2}$.

Vậy nghiệm riêng của bài toán là: $v = \frac{b}{a}(t - \frac{1}{a}) + \frac{b}{a^2}e^{-at}$.

4) Xét một mạch điện có điện trở R = const, hệ số từ cảm L = const và thế điện động E (H 183), tìm cường độ dòng điện i tại thời điểm t, biết $i\big|_{t=0} = 0$. Xét E = const, như ta biết trong vật lý, ta có công thức liên hệ:

$$E = Ri + L\frac{di}{dt}$$

hay $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$ $(R, L = \text{const})$.



Hình 183

Theo công thức (4) ta có nghiệm của bài toán (Cauchy):

$$i = e^{-\int_0^t \frac{R}{L}dt} \int_0^t \frac{E}{L} e^{\int_0^t \frac{R}{L}dt} dt$$

Nếu $E = \text{const}$ thì $i = \dfrac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

Chú ý:

1) Cách giải phương trình tuyến tính ở trên có thể tóm tắt một cách khác như sau:

Đầu tiên giải phương trình thuần nhất (1') ta có: $y = Ce^{-\int Pdx}$, rồi tìm nghiệm của (1) dưới dạng $y = u.v$ với $v = e^{-\int Pdx}$, có nghĩa là coi nghiệm của phương trình thuần nhất là nghiệm của phương trình không thuần nhất với điều kiện coi C là một hàm số của x; C = C (x) = u(x). Do đó phương pháp này cũng gọi là phương pháp biến thiên hằng số (của Lagrange).

2) Công thức (4) có thể viết dưới dạng:

$$y = \left(\int_{x_0}^{x} Q e^{\int_{x_0}^{x} Pdx} dx + C \right) e^{-\int_{x_0}^{x} Pdx}, \quad (x_0, \ x \in X) \qquad (4')$$

Vì tích phân bất định có thể coi như tích phân xác định cận biến đổi. Viết dưới dạng này thì cho thoả mãn sơ kiện $y\big|_{x=x_0} = y_0$, ta có $C = y_0$ và ta được nghiệm của bài toán Cauchy đối phương trình tuyến tính là:

$$y = \left(\int_{x_0}^{x} Q e^{\int_{x_0}^{x} Pdx} dx + y_0 \right) e^{-\int_{x_0}^{x} Pdx} \qquad (5)$$

Ta đã giả thiết $P(x)$, $Q(x)$ là các hàm số liên tục của x trong miền X, do đó nếu $X = (a, b)$ thì nghiệm của bài toán Cauchy là tồn tại và *duy* nhất theo công thức (5) trong giải $a < x < b$, $-\infty < y < +\infty$ và phương trình không có nghiệm bất thường.

3) Theo công thức (4') nghiệm tổng quát của phương trình (1):

$$y = ce^{-\int_{x_0}^{x} Pdx} + \int_{x_0}^{x} Q e^{\int_{x_0}^{x} Pdx} dx . e^{-\int_{x_0}^{x} Pdx}$$

Rõ ràng số hạng thứ nhất là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (1'), số hạng thứ hai là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (1). Tổng quát ta có:

Định lý: ***Nếu Y là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng của (1),*** $\bar{y}$ ***là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (1) thì nghiệm tổng quát của (1) là*** $y = Y + \bar{y}$ ***(2).***

Thực vậy đạo hàm (2) thay vào (1) ta có:

$$Y' + \bar{y}' + P(Y + \bar{y}') = Y' + PY + \bar{y}' + P\bar{y}' = 0 + Q = Q.$$

Hiển nhiên (2) thoả mãn điều kiện Cauchy trong X.

2.4. Phương trình Bernoulli: ***Phương trình Bernoulli là phương trình có dạng***

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha} \qquad (1)$$

α là một hằng số ≠ 0 và 1 (trường hợp α = 0 hoặc α = 1 thì (1) trở thành phương trình tuyến tính đã xét).

Cách giải: Giả sử $P(x)$, $Q(x)$ là các hàm số liên tục trong miền X ta sẽ giải (1) bằng cách đưa về phương trình tuyến tính như sau: Chia 2 vế cho y^{α} (giả sử $y \neq 0$) ta được:

$$y^{-\alpha} y' + P y^{-\alpha+1} = Q(x)$$

Đặt $y^{-\alpha+1} = z$ thì $(-\alpha + 1)\ y^{-\alpha} y' = z'$ hay $y^{-\alpha} y' = \dfrac{z'}{1-\alpha}$.

Thay vào (2) ta được: $\dfrac{z'}{1-\alpha} + Pz = Q$ hay $z' + (1 - \alpha)Pz = (1 - \alpha)Q$ (3).

Đây là phương trình tuyến tính đối với z đã biết. Giải (3) ta có z, ($\neq 0$) rồi trở lại ẩn hàm cũ ta có y.

Thí dụ. Giải phương trình: $y' - \dfrac{4}{x} y = x\sqrt{y}$ (a)

Đây là phương trình Bernoulli với $\alpha = \frac{1}{2}$. Chia 2 vế cho $y^{\frac{1}{2}}$ ta có:

$$y^{-\frac{1}{2}}.y' - \frac{1}{x}y^{\frac{1}{2}} = x$$

Đặt $z = y^{\frac{1}{2}}$ thì $z' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$, thay vào phương trình ta có:

$$2z' - \frac{4}{x}z = x \text{ hay } z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}$$

Đây là một phương trình tuyến tính đối với z.

Giải phương trình thuần nhất ta có $z = cx^2$. Coi $c = c(x)$ và coi $z = c(x).x^2$ là nghiệm của phương trình không thuần nhất; $z' = c'x^2 + 2xc$, ta có:

$$c'x^2 + 2xc - \frac{2}{x}cx^2 = \frac{x}{2} \text{ hay } c' = \frac{1}{2x} \quad (x \neq 0)$$

$$c(x) = \frac{1}{2}\ln|x| + \bar{c}, \quad \bar{c} = \text{const}$$

Do đó: $z = (\frac{1}{2}\ln|x| + \bar{c})x^2$ và $y = z^2 = x^4(\bar{c} + \frac{1}{2}\ln|x|)^2$ (b) là nghiệm tổng quát của (a). Ta thấy $y = 0$ cũng là một nghiệm của (a), nó là nghiệm bất thường của (a) vì dễ dàng thấy nó là hình bao của họ (b).

Chú ý: Trong phương trình Bernoulli (1) ta đã giả thiết $P(x)$, $Q(x)$ liên tục trong miền X. Từ giả thiết này suy ra:

Nếu $X = (a, b)$ thì:

Nghiệm của bài toán Cauchy (nghiệm của phương trình (1) với điều kiện $y|_{x=x_0} = y_0$) là tồn tại và duy nhất với $a < x_0 < b$, $y_0 \neq 0$, $y_0 > 0$. Nếu $\alpha \in Q$ (hữu tỷ), khi $\alpha > 0$, phương trình Bernoulli có nghiệm $y = 0$, nghiệm này là nghiệm riêng nếu $\alpha > 1$ và là nghiệm bất thường nếu $0 < \alpha < 1$

2.5. Phương trình vi phân toàn phần. Thừa số tích phân

a. Định nghĩa và cách giải

Phương trình $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ (1) gọi là phương trình vi phân toàn phần nếu vế phải của nó là một vi phân toàn phần của một hàm số nào đó.

Như vậy nếu phương trình (1) là phương trình vi phân toàn phần thì $Pdx + Qdy = du$, u là một hàm số nào đó của x, y: $u = u(x, y)$ và lúc đó (1) viết được: $du = 0$ suy ra $u(x, y) = c$ là tích phân tổng quát của phương trình.

Ta biết: ***Điều kiện cần và đủ để biểu thức $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ là vi phân toàn phần của một hàm số u trong một miền đơn liên D nào đó là P, Q có các đạo hàm riêng liên tục và thoả mãn hệ thức: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ trong D.***

Ta lại biết khi $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ thì u được xác định theo công thức:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy + C_1$$

hay $$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + C_1 \text{ với } (x_0, y_0) \in D.$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình vi phân toàn phần (1) là:

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy = C \quad (2)$$

hay

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy = C \quad (2')$$

Phương trình vi phân toàn phần không có nghiệm bất thường.

Thí dụ: Giải phương trình:

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

ở đây $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 12xy$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 12xy$

Vậy phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần. Theo (2) ta có tích phân tổng quát của phương trình là: (lấy theo $x_0 = 0$, $y_0 = 0 \in D = R^2$).

$$\int_0^x 3x^2dx + \int_0^y (6x^2y + 4y^3)dy = C$$

hay $$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

Chú ý:

1) Ta có thể giải phương trình vi phân toàn phần (1) bằng cách nhóm hợp các số hạng của phương trình để được vi phân toàn phần của một hàm u nào đó.

Thí dụ: Giải phương trình:

$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$$

Ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-6x}{y^4}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-6x}{y^4} \quad (y \neq 0)$$

Vậy phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần. Ta có thể nhóm hợp các số hạng của phương trình:

$$\frac{2x}{y^3}dx - \frac{3x^2}{y^4}dy + \frac{dy}{y^2} = 0$$

hay $$d(\frac{x^2}{y^3}) - d(\frac{1}{y}) = 0$$

Do đó

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c$$

là tích phân tổng quát của phương trình.

2) Bằng cách dựa vào định nghĩa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) \quad (a); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \quad (b).$$

Từ (a): $u = \int P(x, y)dx + C(y)$; $C(y)$ là một hàm tuỳ ý của y (coi y như hằng số thì hằng số tuỳ ý C phụ thuộc y: $c = C(y)$) do đó:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\int P(x, y)dx\right)'_y + C'(y) = Q(x, y)$$

Từ đây ta có $C(y)$ và ta có u.

Thí dụ:

1) Giải:

$$(3x^2y + y^2)dx + (x^3 + 2xy + 10y)dy = 0,$$

ở đây $P = 3x^2y + y^2$, $Q = x^3 + 2xy + 10y$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 2y$$

Vậy $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

và phương trình là phương trình vi phân toàn phần. Tìm hàm u từ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y + y^2 \text{ suy ra: } u(x, y) = x^3y + xy^2 + C(y) \text{ và}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 + 2xy + C'(y) = x^3 + 2xy + 10y.$$

Do đó $C'(y) = 10y$, suy ra $C(y) = 5y^2 + \overline{C}$.

Vậy $u(x, y) = x^3y + xy^2 + 5y^2 = C$ là tích phân tổng quát của phương trình.

2) Giải:

$$(2x + y)dx + (x - 4y)dy = 0.$$

ở đây $P = 2x + y$, $Q = x - 4y$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Tìm u, từ $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$ suy ra $u = x^2 + xy + C(y)$ $\frac{\partial u}{\partial y} = x + C'(y) = x - 4y$,

hay $C'(y) = -4y$, suy ra $C(y) = -2y^2 + \overline{C}$ và $u(x, y) = x^2 + xy - 2y^2 = C$ là tích phân tổng quát của phương trình. Ta thấy phương trình trên cũng là phương trình đẳng cấp vì đưa về được:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x - 4y} = \frac{-2 - \frac{y}{x}}{1 - 4\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

nên cũng giải được theo phương pháp giải phương trình đẳng cấp.

b) Thừa số tích phân

Xét phương trình $P(x, y)dx + Q(x, y)dx = 0$ (1)

Giả sử phương trình này không phải là phương trình vi phân toàn phần, nếu có một hàm $\mu(x, y)$ sao cho phương trình:

$$\mu(x, y)\ P(x, y)dx + \mu(x, y)\ Q(x, y)dx = 0$$

là một phương trình vi phân toàn phần thì $\mu(x, y)$ gọi là một thừa số tích phân của phương trình (1).

Bây giờ ta giả sử có hàm $\mu(x, y)$ như thế thì:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

nghĩa là:

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

hay
$$P\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y} \qquad (2)$$

Rõ ràng mọi hàm $\mu(x, y)$ thoả mãn (2) đều là thừa số tích phân của phương trình (1).

Phương trình (2) là một phương trình vi phân đạo hàm riêng, người ta chứng minh rằng với những điều kiện nào đó, phương trình (2) có vô số nghiệm.

Nhưng trong trường hợp tổng quát việc tìm $\mu(x, y)$, thoả mãn (2) còn khó khăn hơn việc giải phương trình (1).

Sau đây ta xét một số trường hợp đặc biệt cho việc tìm μ một cách dễ dàng.

1) Giả sử $\mu(x, y) = \mu(y)$ (chỉ phụ thuộc y), lúc đó $\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}=0$ và phương trình (2) viết được:

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}$$

Rõ ràng phương trình này chỉ có nghiệm khi vế phải không phụ thuộc x.

2) Giả sử $\mu(x, y) = \mu(x)$ (chỉ phụ thuộc x).

Tương tự ta có phương trình để xác định $\mu(x)$ với điều kiện vế phải

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=-\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q}$$

không phụ thuộc y.

Thí dụ:

Giải phương trình: $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$.

Ta có: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -x^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2xy - 3x^2$ vậy $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

Mặt khác

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{Q} = \frac{-2}{x} \text{ do đó } \frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{-2}{x} \text{ và } \mu(x) = \frac{1}{x^2}$$

Nhân hai vế của phương trình đã cho với $\mu(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ta có phương trình vi phân toàn phần:

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y - x)dy = 0,\ x \neq 0$$

Nhóm hợp các số hạng ta có:

$$\frac{dx}{x^2} - (ydx + xdy) + ydy = 0$$

Do đó $\dfrac{y^2}{2} - xy - \dfrac{1}{x} = \overline{C}$ hay $y^2 - 2xy - \dfrac{2}{x} = C$ là tích phân tổng quát của phương trình, $(x \neq 0)$.

Chú ý: Việc nhân thừa số tích phân $\mu(x, y)$ với 2 vế của phương trình (1) để có một phương trình vi phân toàn phần có thể làm mất nghiệm của phương trình (1), nghiệm này có thể là nghiệm bất thường.

Chẳng hạn xét thí dụ trên, ta đã sử dụng thừa số tích phân $\mu(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$. Rõ ràng $x = 0$ cũng là một nghiệm của phương trình đã cho, nó là một nghiệm riêng (?), tuy nó không chứa trong nghiệm tổng quát: $y^2 - 2xy - \dfrac{2}{x} = C$, $x \neq 0$ (hay cũng thế, nó chứa trong nghiệm tổng quát này với $c = \infty$!).

2.6. Phương trình Clairaut và Lagrange

Ta đã xét những phương trình vi phân cấp một đã giải ra đối với đạo hàm: $y' = f(x, y)$. Bây giờ ta sẽ xét vài phương trình vi phân cấp một không giải ra đối với đạo hàm y'

a) Phương trình Clairaut: ***Phương trình Clairaut là phương trình có dạng:***

$$y = xy' + \varphi(y') \tag{1}$$

$\varphi(y')$ là một hàm của y' và $\varphi(y') \neq ay' + b$ (?). Đặt $y' = p$ thì (1) viết được

$$y = xp + \varphi(p) \tag{1'}$$

coi $p = p(x)$ và đạo hàm hai vế của (1') theo x ta có:

$$p = x\frac{dp}{dx} + p + \varphi'(p)\frac{dp}{dx} \quad hay \quad [x + \varphi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0$$

do đó

$$\frac{dp}{dx} = 0 \ \ (2) \text{ hoặc } x + \varphi'(p) = 0 \tag{3}$$

Từ (2) ta có: $p = c$ (=const) thay vào (1) ta có:

$$y = cx + \varphi(c) \tag{4}$$

đây là nghiệm tổng quát của (1) (vì lấy đạo hàm ta có $y' = p = c$. Thay vào (1): $\quad cx + \varphi(c) = cx + \varphi(c)$)

Nó biểu thị một họ đường thẳng phụ thuộc tham số c. Từ (3) nếu ta tìm được p là hàm của x: $p = p(x)$ thì thay vào (1) ta có:

$$y = xp(x) + \varphi[p(x)] \tag{5}$$

Rõ ràng (5) là nghiệm của (1) vì:

$$y' = p + [x + \varphi'(p)]p' = p$$

Thay vào (1):

$$xp + \varphi(p) = xp + \varphi(p)$$

Nghiệm (5) không nằm trong nghiệm tổng quát (4). Nó có được bằng cách khử p từ hệ:

$$y = xp + \varphi(p)$$

$$x + \varphi'(p) = 0$$

hay cũng thế khử c từ hệ:

$$y = cx + \varphi(c)$$

$$x + \varphi'_c(c) = 0.$$

nghĩa là nghiệm (5) của phương trình Clairaut biểu thị hình bao của họ đường thẳng có phương trình là nghiệm tổng quát (4), vậy nó là nghiệm bất thường của (1).

Thí dụ: Tìm nghiệm tổng quát và nghiệm bất thường của phương trình Clairaut:

$$y = xp + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} \text{ với } p = y', (a > 0)$$

Theo trên nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = cx + \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}} \text{ (thay } p \text{ bởi } c\text{)}$$

Nghiệm bất thường có được bằng cách khử c từ hệ

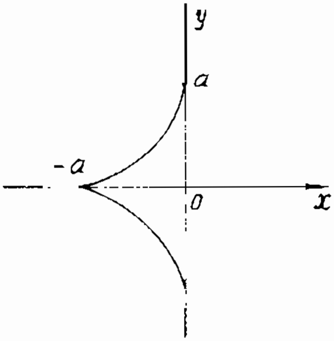
$$\begin{cases} y = cx + \dfrac{ac}{\sqrt{1+c^2}} \\ x + \dfrac{a}{\sqrt{(1+c^2)^3}} = 0 \end{cases}$$

Vậy nghiệm bất thường có dạng tham số c.

$$x = \frac{-a}{(1+c^2)^{\frac{3}{2}}} \quad y = \frac{ac^3}{(1+c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

hay khử c ta có: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

Đó là đường Astroide. Vì dạng tham số của nghiệm bất thường chỉ xác định khi $x \le 0$ nên nghiệm bất thường chỉ biểu thị bởi nửa bên trái của Astroide. (H.184)



Hình 184

b) *Phương trình Lagrange.*

Phương trình Lagrange là phương trình có dạng:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \qquad \textbf{(1)}$$

với $\varphi(y')$, $\psi(y')$ là các hàm của y'. Nếu $\varphi(y') \equiv y'$ thì phương trình Lagrange trở thành phương trình Clairaut đã biết. Đặt $y' = p$ thì (1) viết được:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \qquad (1')$$

coi $p = p(x)$, đạo hàm hai vế (1') theo x và chú ý: $y' = p$ ta có:

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

hay

$$p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} \qquad (2)$$

Với $p - \varphi(p) \neq 0$, (2) viết được:

$$\frac{dx}{dp} - \frac{x\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một đối với hàm $x = x(p)$.

Giải phương trình này ta có: $x = x(p, c)$ (3). Khử p ở hệ gồm (1') và (3) ta có tích phân tổng quát của (1') có dạng: $\Phi(x, y, c) = 0$. Bây giờ xét $p - \varphi(p) = 0$ tại $p = p_0$ thì: $y = p_0 x + \psi(p_0)$ $(\varphi(p) = p_0)$ cũng là nghiệm của (1) nó có thể là nghiện bất thường của phương trình.

Thí dụ: Giải phương trình Lagrange: $y = xy'^2 + y'^2$. Đặt $y' = p$ ta có:

$$y = xp^2 + p^2 \tag{a}$$

Đạo hàm theo x hai vế:

$$y' = p^2 + (2px + 2p)\frac{dp}{dx} = p.$$

với $p - p^2 \neq 0$ ta có:

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{2p}{p - p^2} = \frac{2}{1 - p}$$

Giải phương trình này đối với $x = x(p)$ ta được:

$$x = -1 + \frac{c^2}{(p - 1)^2} \tag{b}$$

Khử p ở hệ (a), (b) ta có nghiệm tổng quát của phương trình (a):

$$y = (c + \sqrt{x + 1})^2.$$

Bây giờ xét $p - p^2 = 0$ khi $p = 1$ và $p = 0$.

Với $p = 1$, theo (a) ta có: $y = x + 1$, nghiệm này là một nghiệm riêng của phương trình đã cho vì nó nằm trong nghiệm tổng quát với $c = 0$.

Với $p = 0$, theo (a) ta có $y = 0$, đây cũng là một nghiệm của phương trình đã cho. Nó là nghiệm bất thường của phương trình vì dễ dàng thấy nó là hình bao của họ đường cong tích phân tổng quát.

§3. BÀI TOÁN QUỸ ĐẠO GÓC α -QUỸ ĐẠO TRỰC GIAO

3.1. Phương trình vi phân của một họ đường cong

Ta biết phương trình vi phân $F(x, y, y') = 0$ (1) có tích phân tổng quát phụ thuộc một hằng số tuỳ ý c: $\varphi(x, y, c) = 0$ và về hình học tích phân này biểu diễn một họ đường cong phụ thuộc tham số c.

Ta thấy: ***phương trình (1) là phương trình liên hệ giữa các tọa độ x, y, hệ số góc của tiếp tuyến y' tại một điểm tuỳ ý trên một đường của họ đường cong, người ta gọi phương trình đó là phương trình vi phân của họ.*** Ngược lại cho một họ đường cong phụ thuộc một tham số p nào đó: $\varphi(x, y, p) = 0$ (a) ta có thể lập phương trình vi phân của họ này.

Thực vậy, coi $y = y(x)$ ta có: $\varphi(x, y(x), p) = 0$ đạo hàm theo x:

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}y' = 0$ (b) khử p ở (a) và (b) ta sẽ có phương trình $F(x, y, y') = 0$ liên hệ giữa các tọa độ x, y hệ số góc y' tại một điểm tuỳ ý trên một đường của họ, đó chính là phương trình vi phân của họ.

Thí dụ: Tìm phương trình vi phân của họ đường tròn:

$$x^2 + y^2 - cx = 0 \qquad (a)$$

Đạo hàm theo x ta có:

$$2x + 2yy' - c = 0 \qquad (b)$$

Từ (a) ta có $c = \dfrac{x^2 + y^2}{x}$ thay vào (b) ta được:

$$2x + 2yy' - \frac{x^2 + y^2}{x} = 0$$

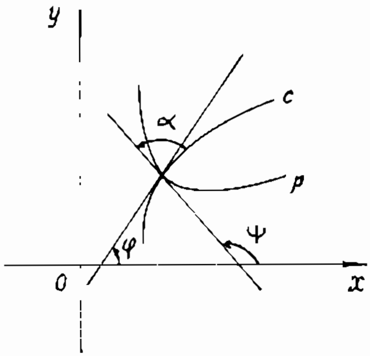
hay

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

Đó là phương trình vi phân của họ đường tròn (a).

3.2. Bài toán quỹ đạo góc α

Trong mặt phẳng xOy cho một họ đường cong C phụ thuộc một tham số p: Φ(x, y, p) = 0 tìm họ đường cong Γ cắt họ C dưới một góc không đổi α. Người ta gọi Γ là họ quỹ đạo góc α của họ C. Đặc biệt $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ***thì họ Γ được gọi là họ quỹ đạo trực giao của họ C.*** Để giải bài toán, ta xét *M* là giao điểm của một đường tuỳ ý trong họ *C* và một đường tuỳ ý trong họ Γ (H. 185).



Hình 185

Gọi tọa độ chạy và hệ số của tiếp tuyến của họ *C* là *X*, *Y*, *Y'* và của họ Γ là *x*, *y*, *y'*. Tại giao điểm *M* ta có: $X = x$, $Y = y$. (1)

Bây giờ ta tìm liên hệ giữa *Y'* và *y'* tại *M*. Theo hình $\psi - \varphi = \alpha$ suy ra $\varphi = \psi - \alpha$.

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\psi - \alpha) = \frac{tg\psi - tg\alpha}{1 + tg\alpha . tg\psi}$$

Nhưng $\mathrm{tg}\varphi = Y'$, $\mathrm{tg}\psi = y'$ nên ta có:

$$Y' = \frac{y' - tg\alpha}{1 + tg\alpha y'} \qquad (2)$$

Mặt khác từ phương trình của họ *C*: Φ(*x*, *y*, *p*) = 0 theo trên ta sẽ tìm được phương trình vi phân của họ này là *F*(*x*, *y*, *y'*) = 0 hay theo ký hiệu trên: *F*(*X*, *Y*, *Y'*) = 0. Do đó theo (1) và (2) tại *M* ta có:

$$F\left(x, y, \frac{y' - tg\alpha}{1 + tg\alpha y'}\right) = 0$$

Vì M là tuỳ ý nên phương trình này là phương trình liên hệ các tọa độ x, y hệ số góc y' của một điểm tuỳ ý trên một đường cong của họ Γ, nó chính là phương trình vi phân của họ Γ. Giải ta sẽ có họ Γ

Đặc biệt $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ thì $Y' = -\dfrac{1}{y'}$ và $F(x, y, -\dfrac{1}{y'}) = 0$ là phương trình của họ quỹ đạo trực giao.

Tóm lại, muốn tìm họ quỹ đạo góc α hay họ quỹ đạo trực giao của họ C: $\Phi(x, y, p) = 0$:

- Đầu tiên ta tìm phương trình vi phân của họ C: $F(x, y, y') = 0$.

- Sau đó thay trong phương trình này y' bởi $\dfrac{y' - tg\alpha}{1 + tg\alpha\, y'}$ hay bởi $-\dfrac{1}{y'}$, ta được phương trình vi phân của họ quỹ đạo góc α hay họ quỹ đạo trực giao của họ C.

- Cuối cùng giải phương trình vi phân này ta sẽ được họ quỹ đạo góc α hay họ quỹ đạo trực giao của họ C.

Thí dụ:

1) Tìm họ quỹ đạo góc $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ của họ đường thẳng $y = px$ (a).

Đầu tiên tìm phương trình vi phân của họ đường thẳng. Từ (a) đạo hàm theo x ta có: $y' = p$ (b). Khử p ở (a) và (b) ta có: $y = y'x$ là phương trình vi phân của họ đường thẳng. Thay trong phương trình này y' bởi $\dfrac{y'-1}{1+y'}$ (vì $tg\alpha = tg\dfrac{\pi}{4} = 1$) ta có phương trình vi phân của họ quỹ đạo là:

$$y = \frac{y'-1}{1+y'}x \quad \text{hay} \quad y' = \frac{x+y}{x-y}$$

Đây là phương trình đẳng cấp, ta đã biết cách giải:

$$y' = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}}$$

đặt $\dfrac{y}{x} = u$ thì $y' = u + xu'$ và

$$u + xu' = \frac{1+u}{1-u} \quad hay \quad \frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x}$$

tích phân ta có

$$\text{arctg}u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + \ln|c| = \ln|x|.$$

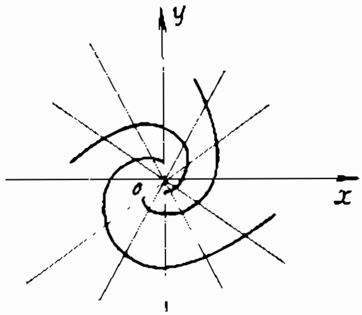
hay

$$arctg\,\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln(1+\frac{y^2}{x^2}) + \ln|c| = \ln|x|$$

$$arctg\,\frac{y}{x} + \ln c = \ln\sqrt{x^2+y^2}$$

suy ra $\sqrt{x^2+y^2} = c.e^{arctg\frac{y}{x}}$

Đổi sang tọa độ độc cực ta có: $r = c.e^{\varphi}$. Vậy họ quỹ đạo $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ của họ đường thẳng trên là họ đường xoắn ốc logarithme (H. 186)

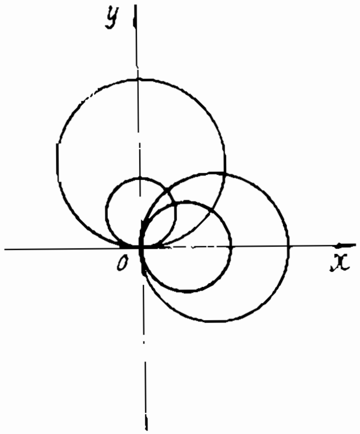


Hình 186

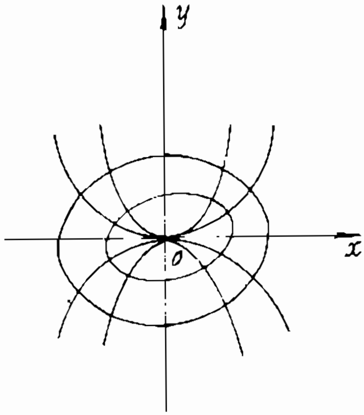
2) Tìm họ quỹ đạo trực giao của họ đường tròn $x^2 + y^2 - cx = 0$. Theo thí dụ ở (3.1) ta có phương trình vi phân của họ đường tròn này là:

$y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$. Thay y' bởi $-\dfrac{1}{y}$ ta có phương trình của họ quỹ đạo trực giao $-\dfrac{1}{y'} = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$ hay $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$ Đây là phương trình đẳng cấp đã giải ở thí dụ 2) ở 2.2. Tích phân tổng quát của nó là:

$x^2 + y^2 - cy = 0$. Đó cũng là họ đường tròn qua gốc nhưng có tâm trên Oy. (H.187)



Hình 187



Hình 188

3) Tìm họ quỹ đạo trực giao của họ parabole $y = px^2$ (a). Đạo hàm theo x: $y' = 2px$, suy ra $p = \dfrac{y'}{2x}$ thay lại (a) ta có phương trình vi phân của họ paraboles đó là:

$$y = \frac{y'}{2x}x^2 \quad hay \quad y' = \frac{2y}{x}.$$

Thay y' bởi $-\dfrac{1}{y'}$ ta có phương trình vi phân của họ quỹ đạo trực giao:

$$-\frac{1}{y'} = \frac{2y}{x} \quad \text{hay} \quad \frac{x}{2}dx + ydy = 0$$

Tích phân ta có:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = c \quad \text{hay} \quad \frac{x^2}{4c} + \frac{y^2}{2c} = 1$$

Do đó họ quỹ đạo trực giao là họ ellipses tâm O (H.188)

§4. GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH CẤP I

Cho phương trình cấp một: $y' = f(x, y)$ (1). Ta biết tại mỗi điểm $(x, y) \in D \subset R^2$, định lý tồn tại và duy nhất đúng thì có một đường cong tích phân duy nhất của phương trình (1) đi qua. Từ phương trình (1) ta có thể tính được hệ số góc của tiếp tuyến tại một điểm (x, y) tuỳ ý với đường cong tích phân qua điểm đó, chẳng hạn tại điểm (x_0, y_0) thì hệ số góc tiếp tuyến với đường cong tích phân qua điểm đó là: $y' = f(x_0, y_0)$.

Do đó về hình học phương trình (1) cho hệ số góc của tiếp tuyến tại một điểm tuỳ ý với đường cong tích phân của nó.

Xuất phát từ ý nghĩa hình học này của phương trình (1) ta sẽ trình bày phương pháp giải gần đúng cho nghiệm riêng của phương trình đó gọi là phương pháp giải gần đúng của Euler.

Nội dung của phương pháp này là thay đường cong tích phân của phương trình (1) bằng một đường gẫy khúc do các tiếp tuyến với đường cong đó tạo nên. Giả sử phải tìm nghiệm riêng $y = y(x)$ của phương trình (1) với sơ kiện: $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

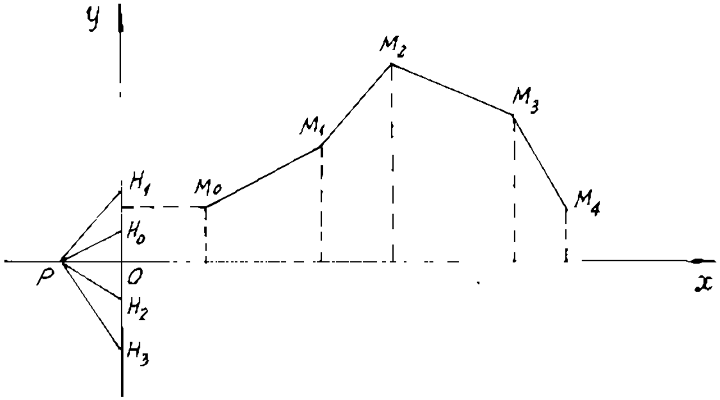
Ta chia khoảng $[x_0, x]$ ra làm n phần bất kỳ bởi các điểm:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = x \quad (11.189)$$

Từ các điểm đó ta dựng các đường thẳng song song với trục Oy. Theo (2) ta có điểm $M_0(x_0, y_0)$ trên đường cong tích phân. Bây giờ ta đặt trên Ox đoạn $\overline{OP} = -1$ và đặt trên Oy đoạn $\overline{OH_0} = y_0' = f(x_0, y_0)$, thì hệ số góc của tiếp tuyến tại M_0 với đường cong tích phân sẽ là:

$$tg\alpha = y_0' = \overline{OH_0} = \frac{\overline{OH_0}}{\overline{OP}}.$$

suy ra phương của tiếp tuyến tại M_0 chính là $\overrightarrow{PH_0}$. Do đó từ M_0 ta dựng đường thẳng song song với PH_0 thì ta được tiếp tuyến tại M_0, tiếp tuyến này cái đường $x = x_1$ tại $M_1(x_1, y_1)$. Một cách gần đúng ta coi M_1 là điểm trên đường cong tích phân ứng với $x = x_1$.



Hình 189

Ta lại đặt trên Oy: $\overline{OH_1} = f(x_1, y_1)$ và tương tự như trên ta lại dựng được tiếp tuyến với đường cong tích phân tại M_1, tiếp tuyến này cắt đường $x = x_2$ tại điểm $M_2(x_2, y_2)$. Ta lại coi gần đúng M_2 là điểm trên đường cong tích phân với $x = x_2$. Quá trình tiếp tục, cuối cùng ta được điểm M_n coi gần đúng là điểm trên đường cong tích phân ứng với $x = x_n$. Kết quả ta được một đường gãy khúc xuất phát từ điểm M_0 coi gần đúng là đường cong tích phân ứng với nghiệm riêng của phương trình (1) với sơ kiện (2).

Để có thể tính toán bằng số, ta viết phương trình của tiếp tuyến tại M_0.

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \quad \text{hay} \quad y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

Cho cắt đường $x = x_1$, ta có $y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$. Do đó ta có giá trị gần đúng của nghiệm tại $x = x_1$ là:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) \tag{a}$$

Tương tự

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) \qquad \text{(b)}$$

. . . .

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \qquad \text{(n)}$$

Từ các đẳng thức (a), (b), ...,(n) ta có:

$$y_n = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) +$$

$$+ f(x_2, y_2)(x_3 - x_2) + \ldots + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

Nếu n càng lớn, nghĩa là chia đoạn $[x_0, x]$ càng làm nhiều phần thì nghiệm riêng tìm được càng chính xác. Phương pháp này cho ta trị số gần đúng của nghiệm riêng ứng với một trị số cụ thể của biến số độc lập mà không cần tìm hàm số biểu diễn nghiệm riêng đó.

Thí dụ: Giải gần đúng phương trình:

$$y' = xy^2 + 1 \text{ với sơ kiện } y\big|_{x=0} = 0 \text{ trong } [0, 1].$$

Ta chia khoảng [0, 1] ra làm 4 phần bằng nhau bởi các điểm $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}25$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 0{,}75$, $x_4 = 1$ theo sơ kiện lần lượt ta có:

$x_0 = 0,\ y_0 = 0,\quad y'_0 = 0.0 + 1 = 1$

$y_1 = 0 + 1(0{,}25 - 0) = 0{,}25,$

$y'_1 = 0.25\,.(0{,}25)^2 + 1 = 1{,}016,$

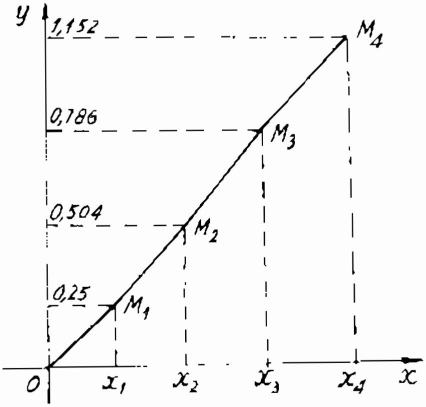
$y_2 = 0{,}25 + 1{,}016.0{,}25 = 0{,}504,$

$y'_2 = 0{,}5.(0{,}504)^2 + 1 = 1{,}127,$

$y_3 = 0{,}504 + 1{,}127.0{,}25 = 0{,}786,$

$y'_3 = 0{,}75.(0.786)^2 + 1 = 1{,}463$

$y_4 = 0{,}786 + 1{,}463.0{,}25 = 1{,}152.$



Hình 190

Đường cong tích phân gần đúng được biểu diễn trên hình (H.190).

§5. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP CAO

5.1. Khái niệm cơ bản

Bây giờ ta chuyển sang xét phương trình cấp n bất kỳ dạng:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

Đối với phương trình này, các khái niệm sơ kiện bài toán Cauchy định lý tồn tại và duy nhất, nghiệm riêng nghiệm tổng quát cũng được phát biểu một cách tương tự như đối với phương trình cấp một dạng (1) ở §1.

Bài toán Cauchy đối với phương trình (1) là bài toán tìm nghiệm của nó thoả mãn điều kiện ban đầu

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0' ,..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

hay

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0', ..., y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \qquad (2)$$

Thí dụ. Xét phương trình dùng để xác định quy luật rơi tự do $s'' = g$. Tích phân 2 vế ta có $s' = gt + c_1$ lại tích phân lần nữa ta có: $s = \frac{gt^2}{2} + c_1t + c_2$.

Như vậy ta được nghiệm phụ thuộc 2 hằng số tuỳ ý c_1 và c_2. Muốn có quy luật xác định, ta phải thêm vào các điều kiện độ cao s và tốc độ $v = s'$ tại thời điểm ban đầu là bao nhiêu? Chẳng hạn $s\big|_{t=0} = 0$ $s'\big|_{t=0} = 0$.

Lúc đó từ nghiệm trên ta có:

$$s' = gt + c_1 \text{ và } 0 = \frac{g}{2}.0 + c_1.0 + c_2; \quad 0 = g.0 + c_1.$$

Suy ra $c_1 = c_2 = 0$ và quy luật phải tìm là $s = \frac{gt^2}{2}$. Đối với bài toán Cauchy (1), (2) ta cũng có:

Định lý tồn tại và duy nhất (của nghiệm)

Nếu hàm $f(x, y, y', y^{(n-1)})$ liên tục trong lân cận của điểm $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ thì phương trình (1) có nghiệm $y = y(x)$ trong lân cận của điểm x_0 thỏa mãn điều kiện ban đầu (2). Hơn nữa nếu $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ cũng liên tục tại điểm $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ thì nghiệm $y = y(x)$ là duy nhất.

Nghiệm của bài toán Cauchy (1), (2) cũng gọi là nghiệm riêng của phương trình vi phân (1).

Nghiệm tổng quát của (1) là hàm $y = y(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ thoả mãn hai điều kiện:

- Là nghiệm của phương trình $\forall c_1, c_2, \ldots, c_n \in R$.

- Cho điều kiện ban đầu (2) thì xác định được $c_1, c_2, \ldots, c_n$ duy nhất.

Thí dụ: Theo thí dụ trên thì $s = \frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2$. là nghiệm tổng quát của phương trình $s'' = g$ và $s = \frac{gt^2}{2}$ là nghiệm riêng của phương trình.

5.2. Phương trình cấp cao có thể hạ thấp cấp

Ta biết dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp n đã giải ra đối với $y^{(n)}$ là $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Trong phần này ta sẽ xét một số dạng đặc biệt của phương trình có thể hạ thấp cấp.

a) Phương trình dạng $\quad y^{(n)} = f(x) \quad$ (1)

Giả sử f là hàm liên tục trong (a, b). Để giải phương trình này ta sẽ hạ thấp cấp của nó dần dần. Vì $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ nên phương trình viết được:

$$(y^{(n-1)})' = f(x).$$

Tích phân ta có: $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + c_1$.

Nhưng $y^{(n-1)} = (y^{(n-2)})'$ nên phương trình này lại viết được

$$(y^{(n-2)})' = \int f(x)dx + c_1 .$$

Tích phân ta có: $y^{(n-2)} = \int(\int f(x)dx)dx + c_1x + c_2$.

Quá trình tiếp tục, ta sẽ đến một phương trình cấp một. Giải phương trình cấp một này ta sẽ có nghiệm phải tìm.

Thí dụ:

1) Giải: $y''' = 2x$, lần lượt hạ cấp ta có:

$$y'' = x^2 + c_1 , \quad y' = \frac{x^3}{3} + c_1x + c_2$$

$$y = \frac{x^4}{12} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$$

2) Giải $y'' = \sin kx$ với sơ kiện $y\big|_{x=0} = 0,\ \ y'\big|_{x=0} = 1$

Ta có

$$y' = \int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + c_1, \quad y = -\frac{\sin kx}{k^2} + c_1x + c_2$$

Theo sơ kiện

$$y'\big|_{x=0} = 1 \text{ ta có } 1 = -\frac{1}{k} + c_1 \text{ suy ra } c_1 = 1 + \frac{1}{k}$$

$$y\big|_{x=0} = 0 \text{ ta có } 0 = 0 + c_1.0 + c_2 \text{ suy ra } c_2 = 0.$$

Do đó nghiệm riêng là:

$$y = -\frac{\sin kx}{k^2} + (1 + \frac{1}{k})x$$

Chú ý: Theo cách giải trên, nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y = \underbrace{\int\int...\int}_{n \text{ lần}} f(x)dxdx...dx + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + ... + c_n .$$

trong miền: $a < x < b$ và $|y| < +\infty$, $|y'| < +\infty$, ... $|y^{(n-1)}| < +\infty$.

Nghiệm của bài toán Cauchy (1)

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \quad (2)$$

trong miền trên là:

$$y = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x} f(x)dxdx\ldots dx + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)} +$$

$$+\frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{(n-2)} + \ldots + y'_0(x-x_0) + y_0.$$

b) Phương trình dạng: $y'' = f(x, y')$. Để hạ cấp ta đặt $y' = p(x)$ thì $y'' = p'$ và phương trình viết được $p' = f(x, p)$ giải phương trình này ta có $p = \varphi(x, c_1)$ trở lại $p = y'$, ta có phương trình cấp 1: $y' = \varphi(x, c_1)$. Giải ta có y.

Thí dụ:

1) Giải:

$$y''(1+x^2) = 2xy' \text{ với sơ kiện } y\big|_{x=0} = 1, \quad y'\big|_{x=0} = 3.$$

Đặt $y' = p$ thì $y'' = p'$ và phương trình viết được:

$$p'(1+x^2) = 2xp \text{ hay } \frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{1+x^2}$$

tích phân ta có:

$$\ln p = \ln(1+x^2) + \ln|c_1| \text{ hay } p = c_1(x^2+1).$$

trở lại $\qquad p = y'$ ta có $y' = c_1(x^2+1)$

từ sơ kiện $y'\big|_{x=0} = 3$ ta xác định ngay c_1: $3 = c_1(0+1)$ suy ra $c_1 = 3$ lúc đó ta có:

$$y' = 3(x^2+1), \text{ tích phân ta có: } y = x^3 + 3x + c_2.$$

từ sơ kiện $y|_{x=0} = 1$, ta xác định c_2 từ phương trình $1 + 0 + 0 + c_2$ suy ra $c_2 = 1$.

Do đó nghiệm riêng phải tìm là:

$$y = x^3 + 3x + 1.$$

Chú ý rằng phương trình trên có thể giải cách khác như sau:

Từ phương trình trên ta có:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{2x}{1+x^2}$$

hay

$$d\ln y' = d\ln(x^2 + 1) \text{ do đó: } y' = c_1(x^2 + 1)...$$

2) Giải

$$y'' - \frac{y'}{x} = xe^x$$

Đặt

$$y' = p \text{ ta có } p' - \frac{p}{x} = xe^x \quad 0.$$

Đây là phương trình tuyến tính cấp một đối với p, giải ta có $p = (e^x + c_1)x$ trở lại $p = y'$ ta có $y' = (e^x + c_1)x$. Tích phân ta có:

$$y = xe^x - e^x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2.$$

Chú ý:

Ta đã xét phương trình cấp 2 dạng $y'' = f(x, y')$ (vắng hàm phải tìm y). Tương tự xét phương trình cấp n dạng:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

Đặt $y^{(k)} = p(x)$ (2) thì (1) viết được:

$$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0 \quad (3)$$

Vậy ta đã hạ được cấp của phương trình (1) từ cấp n xuống cấp $n - k$. Nếu lấy tích phân ta được phương trình:

$$p = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}) \quad (4)$$

Thay lại (2) ta có:

$$y^{(k)} = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}) \quad (5)$$

Phương trình này đã biết cách giải ở (a).

Nếu (3) có nghiệm bất thường thì thay vào (2) và giải (2) ta có nghiệm bất thường của phương trình (1).

Thí dụ:

Giải phương trình:

$$y' = xy'' + y''^2$$

Đặt

$y' = p$ ta có $p = xp' + p'^2$.

Đây là phương trình Clairaut, giải ta có nghiệm tổng quát của nó là:

$p = c_1x + c_1^2$, và nghiệm bất thường $p = -\dfrac{x^2}{4}$.

Do đó: $y' = c_1x + c_1^2$ và $y = \dfrac{c_1}{2}x^2 + c_1^2x + c_2$

là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

Nghiệm bất thường xác định từ : $y' = -\dfrac{x^2}{4}$ hay $y = -\dfrac{x^3}{12} + c$ (một họ nghiệm bất thường).

c) Phương trình dạng $y'' = f(y, y')$ (vắng x)

Để hạ cấp ta đặt $y' = p$, nhưng coi p là hàm số của y, $p = p(y)$. Lúc đó:

$$y'' = (y')'_x = (p)'_x = p'_y . y'_x = \frac{dp}{dy} p$$

và phương trình viết được:

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

giải phương trình này ta được $p = \varphi(y, c_1)$, trở lại $p = y'$ ta có $y' = \varphi(y, c_1)$, tích phân ta sẽ có y.

Thí dụ:

1) Giải

$$yy'' - 2y'^2 = 0.$$

Đặt

$$y' = p(y) \text{ thì } y'' = p\frac{dp}{dy}$$

và phương trình viết được:

$$y.\ p\frac{dp}{dy} - 2p^2 = 0$$

suy ra

$$p = 0 \text{ và } y\frac{dp}{dy} - 2p = 0$$

Từ $p = 0$, ta có $y' = 0$ hay $y = c$.

Từ $y\frac{dp}{dy} - 2p = 0$, ta có $\frac{dp}{p} = \frac{2dy}{y}$ suy ra:

$\ln|p| = 2\ln|y| + \ln|c_1|$ hay $p = c_1y^2$, trở lại $p = y'$ ta có $y' = c_1y^2$ suy ra

$$\frac{dy}{y^2} = c_1dx, \quad -\frac{1}{y} = c_1x + c_2$$

hay

$$y = \frac{1}{c_1x + c_2} \quad \text{(đặt } -c_1, -c_2 \text{ là } c_1, c_2 \text{ vì hằng số tuỳ ý)}$$

2) Giải

$$y'' = e^{2y} \text{ với sơ kiện } y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1.$$

Đặt

$$y' = p(y), \text{ thì } y'' = p\frac{dp}{dy}$$

và phương trình thành:

$$p\frac{dp}{dy} = e^{2y} \text{ suy ra } pdp = e^{2y}dy \text{ và } \frac{p^2}{2} = \frac{e^{2y}}{2} + \frac{c_1}{2}$$

hay

$$p^2 = e^{2y} + c_1, \quad p = \pm\sqrt{e^{2y} + c_1}$$

lấy

$$p = \sqrt{e^{2y} + c_1}\ , \text{ vì theo sơ kiện } y'\big|_{x=0} = p\big|_{x=0} = 1 > 0$$

theo sơ kiện đó ta xác định ngay c_1: $1 = 1 + c_1$ suy ra $c_1 = 0$, lúc đó $p = e^y$ trở lại $p = y'$, ta có:

$$y' = e^y \text{ hay } e^{-y}dy = dx$$

Tích phân ta có: $-e^{-y} = x + c_2$ theo sơ kiện $y\big|_{x=0} = 0$ ta có $-1 = c_2$ do đó:

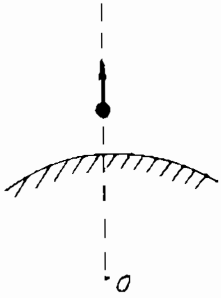
$$1 - e^{-y} = x \text{ hay } y = -\ln|1 - x| \text{ là nghiệm riêng phải tìm.}$$

3) *Bài toán xác định tốc độ vũ trụ cấp hai:* Tốc độ vũ trụ cấp hai là tốc độ ban đầu bé nhất để ném một vật theo hướng thẳng đứng sao cho vật không trở lại trái đất nữa (H 191) Ta sẽ tìm tốc độ này với giả thiết sức cản của không khí không đáng kể.

Gọi khối lượng của vật bị ném lên là m, khối lượng của trái đất là M, theo định luật hấp dẫn vạn vật của Newton thì lực hút tác dụng vào vật có độ lớn là $\frac{kmM}{r^2}$, trong đó K là hằng số hấp dẫn, r là khoảng cách từ vật đến tâm trái đất, vậy phương trình vi phân của chuyển động là:

$$\frac{md^2r}{dt^2} = -k\frac{mM}{r^2} \qquad (1)$$

ở đây dấu – chỉ gia tốc âm. Để giải bài toán, tự nhiên ta phải đưa vào các sơ kiện $r|_{t=0} = R$ (2). R là bán kính trái đất, $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=0} = v_0$ (3), v_0 là vật tốc ban đầu. Phương trình (1) thuộc loại vắng biến số độc lập (ở đây là t) do đó để giải ta đặt $r' = v(r)$ thì $r'' = v\frac{dv}{dr}$ lúc đó (1) viết được.



Hình 191

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{kM}{r^2} \quad hay \quad vdv = -kM\frac{dr}{r^2}$$

Tích phân ta có:

$$\frac{v^2}{2} = kM\frac{1}{r} + c_1$$

Theo sơ kiện (2), (3) ta có:

$$\frac{v_0^2}{2} = kM\frac{1}{R} + c_1 \quad suy \quad ra \quad c_1 = -\frac{kM}{R} + \frac{v_0^2}{2}$$

Thay lại ta có:

$$\frac{v^2}{2} = kM\frac{1}{r} + \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R}\right)$$

Theo giả thiết, vật không được trở lại trái đất thì tốc độ phải luôn luôn dương do đó $\frac{v^2}{2}$ luôn luôn > 0, mặt khác khi r khá lớn thì $\frac{kM}{r}$ khá bé nên suy ra:

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \geq 0 \text{ hay } v_0 \geq \sqrt{\frac{2kM}{R}}.$$

Vậy tốc độ ban đầu bé nhất được xác định bởi công thức $v_0 = \sqrt{\frac{2KM}{R}}$.

Để xác định v_0 cụ thể, ta làm như sau:

Khi vật ở trên mặt đất thì gia tốc r" = g, $r = R$ nên theo (1) ta có $-g = -\frac{kM}{R^2}$ hay $k = \frac{gR^2}{M}$, thay vào (4) ta có: $v_0 = \sqrt{2gR}$, ta biết $g = 981$ cm/giây, $R = 63.10^7$ cm, do đó tính ra ta được $v_0 = 11,2$ km/giây. Đó là tốc độ vũ trụ cấp hai phải tìm.

Chú ý rằng ở đây ta chỉ cần tìm v, mà không phải tìm r nên không phải quay lại $r' = v$.

Chú ý: ***Tương tự, phương trình cấp n dạng:***

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \text{ (vắng } x) \qquad (1)$$

Giải bằng cách đặt y' = p(y).

Ta sẽ giảm được cấp của (1) xuống một đơn vị. Khi coi p là hàm của y: $p = p(y)$ ta có thể làm mất nghiệm của phương trình (1) dạng $y = c$, ta có thể thử trực tiếp bằng cách thay vào (1), nó có thể là nghiệm của phương trình hoặc không.

§6. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CẤP CAO

6.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp n là phương trình có dạng:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

trong đó a_1, a_2,..., a_n là các hàm số của x gọi là các hệ số của phương trình, đặc biệt có thể là hằng số, còn f cũng là hàm số của x gọi là vế phải hay số hạng tự do của phương trình, nếu $f \equiv 0$ thì phương trình gọi là tuyến tính thuần nhất còn nếu $f \neq 0$ thì phương trình gọi là tuyến tính không thuần nhất.

Thí dụ: Phương trình

$$y'' + xy' + x^2y = 0, \quad y'' + \frac{1}{x}y' + e^x y = \ln x$$

là các phương trình tuyến tính thuần nhất và không thuần nhất cấp hai.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{2d^2y}{dx^2} + 6x\frac{dy}{dx} + x^2y = \sin x$$

là phương trình tuyến tính không thuần nhất cấp ba.

$$y'' + xy' + y^2 = e^x, \quad y''' + y''^2 - xy' = 0$$

không phải là phương trình tuyến tính.

Đối với phương trình (1), giả sử $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$, $f(x)$ là các hàm liên tục của x trong miền X, theo định lý tồn tại duy nhất nghiệm thì ***bài toán Cauchy của phương trình (1) có nghiệm duy nhất $y = y(x)$ trong miền X thoả mãn điều kiện ban đầu:***

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\Big|_{x=x_0} = y'_0, ..., y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \tag{2}$$

$$\forall x_0 \in X \text{ và } y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)} \text{ tuỳ ý.}$$

Rõ ràng mọi nghiệm của (1) đều là nghiệm riêng ,vì theo giả thiết thì (1) không có nghiệm bất thường. Đặc biệt phương trình tuyến tính thuần nhất ($f \equiv 0$) luôn luôn có nghiệm $y = 0$ thoả mãn điều kiện triệt tiêu.

$$y\Big|_{x=x_0} = 0, \quad y'\Big|_{x=x_0} = 0, ..., y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = 0, \; x_0 \in X$$

Phương trình vi phân tuyến tính có rất nhiều ứng dụng trong khoa học và kỹ thuật, nhất là phương trình cấp hai.

Đầu tiên ta nghiên cứu phương trình tuyến tính cấp hai, sau đó sẽ mở rộng nghiên cứu phương trình tuyến tính cấp n bất kỳ.

6.2. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

Theo định nghĩa phương trình tuyến tính cấp hai có dạng:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

Đặt $a_1(x) = p(x)$, $a_2(x) = q(x)$ ta có: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ giả sử $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ là các hàm liên tục trong miền X.

a) ***Phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp hai***

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (1)$$

Để xét tính chất của nghiệm phương trình này, ta có:

Định lý 1: ***Nếu $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ là hai nghiệm riêng của (1) thì $y = c_1y_1 + c_2y_2$ trong đó c_1, c_2 là các hằng số tuỳ ý, cũng là nghiệm của nó.***

Chứng minh: Từ $y = c_1y_1 + c_2y_2$, lấy đạo hàm ta có:

$$y' = c_1y'_2 + c_2y'_2, \quad y'' = c_1y_1'' + c_2y_2''$$

Thay vào vế trái của (1) ta có:

$$c_1y_1'' + c_2y_2'' + p(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) =$$

$$= c_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + c_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)$$

$$= c_1.0 + c_2.0 = 0.$$

Vì theo giả thiết y_1, y_2 là các nghiệm của (1), các tổng trong hai dấu ngoặc đồng nhất không. Vậy định lý là đúng.

Để xét cách cấu tạo nghiệm tổng quát của phương trình (1) đầu tiên ta nhắc lại khái niệm độc lập tuyến tính của hai hàm số:

Hai hàm $y_1(x)$, $y_2(x)$ gọi là độc lập tuyến tính trong miền X nếu

$$\forall c_1, c_2 \in R: c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0 \ (x \in X) \text{ chỉ khi } c_1 = c_2 = 0.$$

ngược lại thì $y_1(x)$, $y_2(x)$ gọi là phụ thuộc tuyến tính nghĩa là:

$$\exists c_1, c_2 \subset R: c_1 \text{ hoặc } c_2 \neq 0: c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0,$$

giả sử $c_1 \neq 0$ thì $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = -\dfrac{c_2}{c_1} = const.$. Vậy $y_1(x)$, $y_2(x)$ là độc lập tuyến tính trong X, nếu $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const$, $(x \in X)$.

Thí dụ:

e^x và e^{2x} là độc tuyến tính vì $\dfrac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x} \neq c$, , ce^{2x} và e^{2x} là phụ thuộc tuyến tính vì $\dfrac{ce^{2x}}{e^{2x}} = c$. Để xét tính chất của các nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (1) ta có:

Định lý 2:

Nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$ là 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình (1) thì định thức:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

tại mọi điểm trong miền liên tục X của các hàm số p, q của phương trình.

Định thức W gọi là định thức Wronkien của phương trình (1).

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh định lý này bằng phản chứng. Giả sử $W(x)$ triệt tiêu tại một điểm $x = x_0$ trong miền liên tục của p, q ta sẽ đi đến mâu thuẫn.

Thực vậy, giả sử:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} = 0, \ x_0 \in X$$

Do đó theo đại số thì hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với các ẩn số α, β nào đó:

$$\begin{cases} \alpha y_1(x_0) + \beta y_2(x_0) = 0 \\ \alpha y'_1(x_0) + \beta y'_2(x_0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

có một nghiệm khác không α, β.

Bây giờ xét hàm số $Y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$ với $(\alpha, \beta) \neq 0$. Theo định lý 1, hàm số này cũng là nghiệm của phương trình (1) và theo hệ (2) nó thoả mãn sơ kiện triệt tiêu:

$$Y\big|_{x=x_0} = 0, \quad Y'\big|_{x=x_0} = 0$$

Mặt khác hàm $y \equiv 0$ cũng là nghiệm của (1) và thoả mãn sơ kiện triệt tiêu: $y\big|_{x=x_0} = 0$, $y'\big|_{x=x_0} = 0$. Do đó theo định lý tồn tại duy nhất nghiệm: hai nghiệm cùng thoả mãn một sơ kiện thì hai nghiệm đó đồng nhất nhau. Vậy ta phải có $Y \equiv 0$ hay

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) \equiv 0 \text{ giả sử } \alpha \neq 0 \text{ suy ra } \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = -\frac{\beta}{\alpha} = const$$

Điều này trái với giả thiết: $y_1(x)$, $y_2(x)$ độc lập tuyến tính. Vậy định lý đúng.

Bây giờ xét cách cấu tạo nghiệm tổng quát của phương trình (1) ta có:

Định lý 3. ***Nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$ là hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình (1) thì $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ là nghiệm tổng quát của phương trình đó (trong miền X).***

Chứng minh:

Muốn chứng minh y là nghiệm tổng quát của phương trình (1) theo định nghĩa nghiệm tổng quát ta phải chứng minh: Nó là nghiệm của (1) và từ sơ kiện.

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y'_0$$

ta phải xác định được c_1, c_2 duy nhất.

Theo định lý 1 thì y cũng là nghiệm của (1)

Cho thoả mãn sơ kiện ta có:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

– Coi c_1, c_2 như ẩn số, thì định thức của hệ này chính là $W(x_0)$, theo định lý 2: $W(x_0) \neq 0$, $\forall x_0 \in X$, vì theo giả thiết $y_1(x)$, $y_2(x)$ là độc lập tuyến tính, Do đó hệ này có nghiệm duy nhất, nghĩa là c_1, c_2 được xác định duy nhất.

Thí dụ:

Tìm nghiệm của $(x - 1)y'' - xy' + y = 0$ với sơ kiện:

$$y\big|_{x=0} = 2, \quad y'\big|_{x=0} = 1.$$

Dễ dàng thấy $y_1 = x$, $y_2 = e^x$ là các nghiệm riêng của phương trình (đạo hàm thay vào phương trình ta được một đồng nhất thức) hơn nữa $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{x}{e^x} \neq c$ nên chung là độc lập tuyến tính, do đó theo định lý 3: $y = c_1 x + c_2 e^x$ là nghiệm tổng quát của phương trình, cho y thoả mãn sơ kiện ta có:

$$\begin{cases} 2 = c_2 \\ 1 = c_1 + c_2 \end{cases} \quad \text{suy ra} \quad \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng phải tìm là: $y = -x + 2e^x$.

b) Phương trình tuyến tính không thuần nhất cấp hai

Xét phương trình tuyến tính không thuần nhất cấp hai:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

và phương trình thuần nhất tương ứng:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (1')$$

về cấu tạo nghiệm tổng quát của (1) ta có:

Định lý 1:

Nếu $Y = c_1y_1 + c_2y_2$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (1') và $\bar{y}$ là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất tương ứng (1) thì nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (1) là $y = Y + \bar{y}$ $(\forall x \in X)$.

Chứng minh:

Đầu tiên ta chứng minh y là nghiệm của (1). Lấy đạo hàm $y = Y + \bar{y}$, ta có:

$$y' = Y' + \bar{y}', \quad y'' = Y'' + \bar{y}''$$

Thay vào vế trái ta có:

$$Y'' + \bar{y}'' + p(Y' + \bar{y}') + q(Y + \bar{y})$$

$$= (Y'' + pY' + qY) + \bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y} = 0 + f(x) = f(x).$$

vì $Y'' + pY' + qY = 0$ do Y là nghiệm của (1'), còn $\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y} = f(x)$ do $\bar{y}$ là nghiệm của (1). Vậy thay y vào (1) ta có đồng nhất thức $f(x) = f(x)$ nghĩa là y là nghiệm của phương trình đó.

Bây giờ chứng minh từ sơ kiện xác định được c_1, c_2 duy nhất, điều này rõ ràng là đúng theo cách chứng minh đối với phương trình thuần nhất.

Trường hợp $f(x)$ là tổng của một số hữu hạn hàm số:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x).$$

Ta có định lý sau gọi là ***nguyên lý xếp chồng nghiệm.***

Định lý 2.

Nếu $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$ là các nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (1) tương ứng với các vế phải là $f_1, f_2, \dots, f_n$ thì $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \dots + \bar{y}_n$ là nghiệm riêng của (1) với vế phải là

$$f(x) = f_1 + f_2 + \dots + f_n$$

Chứng minh:

Ta chứng minh trường hợp $f(x) = f_1 + f_2$ trường hợp tổng quát tương tự. Thực vậy, từ $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$, đạo hàm:

$$\bar{y}' = \bar{y}'_1 + \bar{y}'_2,\ \bar{y}'' = \bar{y}''_1 + \bar{y}''_2$$

thay vào vế trái của (1) ta có:

$$\bar{y}''_1 + \bar{y}''_2 + p(\bar{y}'_1 + \bar{y}'_2) + q(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)$$

$$= (\bar{y}''_1 + p\bar{y}'_1 + q\bar{y}_1) + (\bar{y}''_2 + p\bar{y}'_2 + q\bar{y}_2) = f_1 + f_2$$

Thí dụ:

Xét phương trình

$$xy'' + y' = x^2$$

Dễ dàng thấy $y_1 = 1$, $y_2 = \ln x$ là hai nghiệm riêng của phương trình thuần nhất và $\bar{y} = \dfrac{x^3}{9}$ là một nghiệm của phương trình không thuần nhất. Rõ ràng y_1, y_2 là độc lập tuyến tính ($\dfrac{1}{\ln x} \neq const$). Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y = c_1 + c_2\ln x + \dfrac{x^3}{9}$.

c) Cách giải

1) **Phương pháp hạ cấp:** Cho phương trình:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

Giả sử biết một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất (1) là y_1 ($y_1 \neq 0$). Ta tìm nghiệm của (1) dưới dạng:

$y = y_1.z$ (2). Đạo hàm (2):

$$y' = y'_1z + y_1z',\ y'' = y''_1z + 2y'_1z' + y_1z''$$

Thay lại (1) ta có:

$$y''_1 z + 2y'_1 z' + y_1 z'' + p(y'_1 z + y_1 z') + q y_1 z = f(x)$$

hay

$$z(y''_1 + py'_1 + qy_1) + y_1 z'' + (py_1 + 2y'_1).z = f(x) \qquad (3)$$

Vì y_1 là một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất nên: $y''_1 + py'_1 + qy_1 \equiv 0$, lúc đó (3) viết được:

$$z'' + (p + \frac{2y'_1}{y_1})z' = \frac{f}{y_1} \qquad (4)$$

Phương trình (4) là phương trình tuyến tính cấp một đối với z', giải ta có z', sau đó tích phân ta có z thay lại (2) ta được nghiệm tổng quát của (1). Đặc biệt $f \equiv 0$ thì ta có nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất. Cụ thể, lấy tích phân phương trình (4) với $f \equiv 0$.

$$d\ln z' = -pdx - 2d\ln y_1$$

hay

$$\ln z' = -\int pdx - \ln y_1^2 + \ln c_2$$

suy ra

$$z' = \frac{c_2 e^{\int pdx}}{y_1^2} \quad \text{và} \quad z = c_2 \int \frac{e^{-\int pdx}}{y_1^2} dx + c_1 \qquad (5)$$

Thay (5) vào (2) ta có:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{e^{-\int pdx}}{y_1^2} dx \qquad (6)$$

Như vậy biết một nghiệm riêng y_1 của phương trình thuần nhất

$$y'' = p(x)y' + q(x)y = 0$$

ta sẽ có nghiệm thứ hai

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int pdx}}{y_1^2} dx \qquad (7)$$

của phương trình, rõ ràng y_1, y_2 là độc lập tuyến tính với nhau vì:

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx \neq \text{const}$$

và ta sẽ có nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất theo công thức (6).

Thí dụ:

1) Giải $y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 2x$

Dễ dàng thấy $y_1 = x$ là một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất tương ứng. Do đó tìm nghiệm y dưới dạng $y = xz$, đạo hàm $y' = z + xz'$, $y'' = 2z' + xz''$, thay vào phương trình trên ta có:

$$2z' + xz'' - \frac{2}{x}(z + xz') + \frac{2}{x^2} xz = 2x$$

hay $z'' = 2$, suy ra $z' = 2x + c_1$, $z = x^2 + c_1 x + c_2$ do đó $y = xz = c_1 x^2 + c_2 x + x^3$.

2) Giải $y'' - \frac{2x}{1 - x^2} y' + \frac{2}{1 - x^2} y = 0$

Dễ dàng thấy $y_1 = x$ là một nghiệm riêng của phương trình.

Ta tính y_2 theo công thức (7)

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx}}{x^2} dx = \frac{1}{2} x \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = c_1 x + c_2\left(\frac{1}{2} x \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1\right)$$

2) Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Xét phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1)$$

và phương trình thuần nhất tương ứng:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (1')$$

Giả sử biết $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ (2) là nghiệm tổng quát của (1') ($y_1(x)$, $y_2(x)$ là 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính của (1')).

Tương tự như đã làm đối với phương trình tuyến tính cấp một, ta sẽ tìm nghiệm của (1) dưới dạng (2), nhưng coi $c_1 = u_1(x)$, $c_2 = u_2(x)$ là các hàm của x trong miền $\boldsymbol{X}$ (miền tồn tại nghiệm của phương trình), ta có :

$$y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \qquad (3)$$

Lấy đạo hàm ta có:

$$y' = u_1y_1' + u_2y_2' + u_1'y_1 + u_2'y_2$$

Ta đưa điều kiện bổ sung:

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \qquad (4)$$

khi đó:

$$y' = u_1y_1' + u_2y_2' \qquad (5)$$

Lại lấy đạo hàm ta có:

$$y'' = u_1y_1'' + u_2y_2'' + u_1'y_1' + u_2'y_2' \qquad (6)$$

Thay y, y', y'' theo (3), (5), (6) vào (1) và nhóm họp ta có:

$$u_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + u_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x)$$

và y_1, y_2 là nghiệm (1') nên từ đẳng thức này suy ra:

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x) \qquad (7)$$

Như vậy (3) là nghiệm của (1) nếu các hàm $u_1'(x)$, $u_2'(x)$ thoả mãn hệ gồm (4) và (7) nghĩa là hệ:

$$\begin{cases} u'_1 y_1 - u'_2 y_2 = 0 \\ u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = f(x) \end{cases} \quad (8)$$

Rõ ràng hệ (8) có nghiệm duy nhất u_1, u_2 vì theo giả thiết y_1, y_2 là độc lập tuyến tính nên

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0 \ \forall x \in X$$

Giả sử $u'_1(x) = \varphi_1(x)$, $u'_2(x) = \varphi_2(x)$

Lấy tích phân ta có:

$$u_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + \bar{c}_1$$

$$u_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + \bar{c}_2 \qquad (9) \quad (\bar{c}_1, \ \bar{c}_2 = \text{const})$$

Thay (9) vào (3) ta có nghiệm của (1):

$$y = \bar{c}_1 y_1 + \bar{c}_2 y_2 + y_1 \int \varphi_1(x)dx + y_2 \int \varphi_2(x)dx \qquad (10)$$

Rõ ràng (10) là nghiệm tổng quát của (1).

Thí dụ:

Giải phương trình:

$$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1} \qquad (a)$$

Giải phương trình thuần nhất tương ứng: $y'' - y = 0$ (vắng x), ta được hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$. Theo phương pháp trên ta tìm nghiệm tổng quát của (a) là:

$$y = u_1(x)e^x + u_2(x)e^{-x} \qquad (b)$$

$u_1(x)$, $u_2(x)$ được xác định từ hệ:

$$\begin{cases} u'_1 e^x + u'_2 e^{-x} = 0 \\ u'_1 e^x - u'_2 e^{-x} = \dfrac{e^x}{e^x + 1} \end{cases}$$

Giải hệ này ta được:

$$u_1'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{e^x+1}, \quad u_2'(x) = -\frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{e^x+1}$$

Lấy tích phân ta được:

$$u_1(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(e^x+1) + \bar{c}_1$$

$$u_2(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\ln(e^x+1) + \bar{c}_2 \qquad (c)$$

Thay $u_1(x)$, $u_2(x)$ theo (c) vào (b) ta có nghiệm tổng quát của (a) là:

$$y = \bar{c}_1 e^x + \bar{c}_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\{[x - \ln(e^x+1)]e^x + 1 - [\ln(e^x+1)]e^{-x}\}$$

6.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp n

Theo định nghĩa phương trình vi phân tuyến tính cấp n có dạng:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

Giả sử $a_1(x)$, $a_2(x)$,...., $a_n(x)$, $f(x)$ là các hàm liên tục trong miền X.

a) Phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp n

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad (1)$$

Để tìm nghiệm tổng quát của (1) đầu tiên ta có:

Định lý 1: ***Nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ là các nghiệm riêng của phương trình (1) thì:***

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x) \quad \forall c_1, c_2, \ldots, c_n \in R.$$

cũng là nghiệm của phương trình đó.

Chứng minh:

Ký hiệu phương trình (1) là $L[y] = 0$. Xét

$$L[y] = L[c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2] + \ldots + c_nL[y_n].$$

(Theo tích chất của đạo hàm). Theo giả thiết $L[y_i] = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Vậy $L[y] = 0$, nghĩa là y là nghiệm của phương trình (1).

Gọi C_x là tập hợp các nghiệm của phương trình (1), thì theo định lý 1 C_x là một không gian tuyến tính. Ta biết (đại số tuyến tính) trong không gian tuyến tính:

Hệ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $(y_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n)$ **(2)**

gọi là độc lập tuyến tính nếu hệ thức:

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n = 0$$

với $c_1, c_2, \ldots, c_n = const \in R$ chỉ thoả mãn khi $c_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ngược lại thì hệ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gọi là phụ thuộc tuyến tính.

Định nghĩa: ***Hệ nghiệm $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ độc lập tuyến tính trong miền X của phương trình (1) gọi là hệ nghiệm cơ bản của phương trình đó.***

Đối với hệ nghiệm cơ bản của (1) ta có:

Định lý 2: ***Điều kiện cần và đủ để hệ nghiệm $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ của phương trình (1) là 1 hệ nghiệm cơ bản của phương trình đó là định thức:***

$$W_n(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3) \quad \forall x \in X.$$

Định thức (3) gọi là định thức Wronskien của phương trình vi phân (1).

Chứng minh:

Điều kiện cần: Giả sử hệ (2) là hệ nghiệm cơ bản của hệ (1) nghĩa là một hệ nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình đó. Ta sẽ chứng minh $W_n(x) \neq 0$ tại $\forall x \in X$. Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử ngược lại: $W_n(x_0) = 0$, $x_0 \in X$, khi đó

$$\exists\, c_1, c_2, \ldots, c_n \in R,\ c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 \neq 0 \text{ thỏa mãn hệ:}$$

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) & = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \ldots + c_n y_n'(x_0) & = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = 0 \end{cases} \tag{4}$$

(Hệ phương trình đại số tuyến tính có nghiệm khác không, khi đó định thức các hệ số của các ẩn số của hệ bằng không). Xét hàm

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x),\ \forall x \in X. \tag{5}$$

với $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ là một nghiệm khác không của hệ (4).

Theo định lý 1, hàm (5) cũng là một nghiệm của phương trình (1) theo (4) nó thỏa mãn điều kiện ban đầu triệt tiêu

$$y\Big|_{x=x_0} = 0,\quad y'\Big|_{x=x_0} = 0, \ldots, y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = 0 \tag{6}$$

Mặt khác, hàm $Y \equiv 0$ cũng là nghiệm của phương trình (1) và thoả mãn điều kiện ban đầu triệt tiêu (6). Theo định lý tồn tại duy nhất nghiệm thì $y \equiv Y$, nghĩa là:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) \equiv 0,$$

với $\quad c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 \neq 0$ và $\forall x \in X$.

Theo định nghĩa thì hệ hàm $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ là phụ thuộc tuyến tính $\forall x \in X$, trái với giả thiết.

Vậy điều kiện cần được chứng minh.

Điều kiện đủ:

Giả sử $W(x) \neq 0$, $\forall x \in X$ ta sẽ chứng minh hệ (2) là độc lập tuyến tính. Cũng dùng phép phản chứng ta sẽ chứng minh mệnh đề tương đương. Nếu hệ (2) phụ thuộc tuyến tính $\forall x \in X$ thì $W_n(x) = 0$, $\forall x \in X$. Điều này là rõ ràng vì hệ (2) phụ thuộc tuyến tính nghĩa là:

$$c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n = 0 \quad c_i = \text{const } (i = 1, 2,..., n) \qquad (7)$$

và ít nhất một $c_i \neq 0$. Đạo hàm theo x (7) đến cấp $(n - 1)$ ta có:

$$c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n = 0$$

$$c_1y_1' + c_2y_2' + ... + c_ny_n' = 0$$

$$.......................................$$

$$c_1y_1^{(n-1)} + c_2y_2^{(n-1)} + ... + c_ny_n^{(n-1)} = 0$$

Hệ này ta có $c_i \neq 0$, $W_n(x)$ là định thức các hệ số của c_i $(i = 1, 2,..., n)$ do đó $W_n(x) = 0$.

Định lý 3. ***Nếu $y_1, y_2,...,y_n$ là một hệ nghiệm cơ bản của phương trình (1) trong miền X (miền liên tục của các hệ số của phương trình) thì nghiệm tổng quát của phương trình đó trong miền X là:***

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n, \ \forall c_1, c_2,..., c_n \in R \qquad (8)$$

Chứng minh:

1) Theo định lý 1 thì (8) là nghiệm của (1)

2) Cho (8) thoả mãn điều kiện ban đầu (2). Ở 6.1.

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) + ... + c_ny_n(x_0) & = y_0 \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) + ... + c_ny_n'(x_0) & = y_0' \\ .... & \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) & = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Định thức của hệ này là định thức Wronskien $W_n(x)$ tại x_0, theo định lý 2, $W_n(x_0) \neq 0$.

Vậy hệ (8) có nghiệm duy nhất $c_1, c_2..., c_n$ nghĩa là (8) là nghiệm tổng quát của (1).

Thí dụ:

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình:

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0 \qquad \text{(a)}$$

Rõ ràng $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$ là các nghiệm của phương trình (a), chúng là độc lập tuyến tính, $\forall x \neq 0$ vì:

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3 \neq 0 \qquad (x \neq 0)$$

Vậy $y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ là nghiệm tổng quát của (1) với $x \neq 0$.

b) Phương trình tuyến tính không thuần nhất cấp n

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Xét phương trình thuần nhất tương ứng $L[y] = 0$ (2)

Giả sử $a_i(x)$ $(i = 1, 2,\dots, n)$, $f(x)$ là các hàm liên tục trong miền X ta có:

Định lý 1:

Nếu Y là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2) và $\bar{y}$ là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (1) thì nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (1) là: $y = Y + \bar{y}$.

Chứng minh:

Ta có: $L[y] = L[Y + \bar{y}] = L[Y] + L[\bar{y}] = 0 + f(x)$.

Mặt khác $Y = c_1y_1 + c_2 + y_2 + \dots + c_ny_n$ với y_i $(i = 1, 2,\dots, n)$ là các nghiệm riêng độc lập tuyến tính của (2) tương tự như chứng minh định lý 3 ở (a), cho $y = Y + \bar{y}$ thoả mãn sơ kiện ta sẽ xác định được c_i $(i = 1, 2,\dots, n)$ duy nhất.

Định lý 2: (Nguyên lý chồng chất nghiệm)

Nếu $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ và $L[\bar{y}_1] = f_1(x)$,

$L[\bar{y}_2] = f_2(x),\dots, L[\bar{y}_n] = f_n(x)$.

thì $L[\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \dots + \bar{y}_n] = f(x)$ ***nghĩa là.***

$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \dots + \bar{y}_n$ ***là nghiệm của (1).***

Chứng minh:

Ta có:

$$L[\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \dots + \bar{y}_n] = L[\bar{y}_1] + L[\bar{y}_2] + \dots + L[\bar{y}_n].$$

$$= f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) = f(x).$$

c) Lấy tích phân phương trình tuyến tính cấp n

1) Phương pháp hạ cấp

Cho phương trình:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

Nếu biết một nghiệm $y_1(x)$ của $L[y] = 0$ thì bằng phép thế $y = y_1.z$ ta sẽ đưa phương trình (1) về phương trình tuyến tính cấp n - 1 với ẩn hàm mới $u(x) = z'(x)$.

Thí dụ: Tích phân phương trình:

$$x^3y''' - 2x^2y'' + 3xy' - 3y = 0$$

Rõ ràng $y_1 = x$ là một nghiệm của phương trình này. Dùng phép thế: $y = xz$ ta có $y' = z + xz'$, $y'' = 2z' + xz''$, $y''' = 3z'' + xz'''$, thay vào phương trình đã cho và đơn giản ta được:

$$x^2z''' + xz'' - z' = 0$$

Đặt $z' = u$, ta được $x^2u'' + xu' - u = 0$.

Rõ ràng $u_1 = 2x$ là một nghiệm riêng của phương trình này, lại đặt $u = 2x.v$, $u' = 2xv' + 2v$, $u'' = 4v' + 2xv''$.

Thay vào phương trình và đơn giản ta được $xv'' + 3v' = 0$, lấy tích phân ta được

$$v = \frac{c_1}{2x^2} + c_2, \quad u = 2xv = \frac{c_1}{x} + 2c_2 x \ , \quad z = \int u dx$$

$$= c_1 \ln x + c_2 x^2 + c_3\ , \quad y = c_1 x \ln x + c_2 x^3 + c_3 x.$$

rõ ràng x, x^3, $x\ln x$ là một hệ nghiệm cơ bản của phương trình.

2) Phương pháp biến thiên hằng số của Lagrange

Giả sử cần tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

Biết một hệ nghiệm cơ bản $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ của phương trình:

$$L[y] = 0 \qquad (2)$$

Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (2) là:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n, \quad c_i = \text{const } (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Như đối với phương trình cấp hai, nội dung của phương pháp biến thiên hằng số Lagrange là: coi $c_i = u_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ là các hàm khả vi của x trong miền X và coi:

$$y = u_1(x)\, y_1 + u_2(x)y_2 + \ldots + u_n(x)y_n, \qquad (a)$$

là nghiệm của phương trình (1) khi đó, đạo hàm (a) thay vào (1) và đưa vào một số điều kiện bổ sung, ta sẽ xác định được $u_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ từ hệ:

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 + \ldots + u_n'y_n = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' + \ldots + u_n'y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1'y_1^{(n-2)} + u_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + u_n'y_n^{(n-2)} = 0 \\ u_1'y_1^{(n-1)} + u_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + u_n'y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \qquad (3)$$

Thay $u_i(x)$ tìm được từ hệ này vào (a) ta sẽ được nghiệm tổng quát của (1).

*Cụ thể, đạo hàm (a) theo x:

$$y' = uy_1' + uy_2' + \ldots + uy_n' + u_1'y_1 + u_2'y_2 + \ldots + u_n'y_n$$

Ta đưa vào điều kiện phụ: $u_1'y_1 + u_2'y_2 + \ldots + u_n'y_n = 0$ (a')

Khi đó: $$y' = uy_1' + uy_2' + \ldots + uy_n' \qquad \text{(b)}$$

Lại lấy đạo hàm theo x:

$$y'' = uy_1'' + uy_2'' + \ldots + uy_n'' + u_1'y_1' + u_2'y_2' + \ldots + u_n'y_n'$$

Lại đưa vào điều kiện phụ:

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' + \ldots + u_n'y_n' = 0 \qquad \text{(b')}$$

thì: $$y'' = uy_1'' + uy_2'' + \ldots + uy_n'' \qquad \text{(c)}$$

Tiếp tục quá trình ta đi đến:

$$y^{(n-1)} = u_1y_1^{(n-1)} + u_2y_2^{(n-1)} + \ldots + u_ny_n^{(n-1)} \qquad \text{(l)}$$

với điều kiện phụ:

$$u_1'y_1^{(n-2)} + u_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + u_n'y_n^{(n-2)} = 0 \qquad \text{(l')}$$

do đó:

$$y^{(n)} = u_1y_1^{(n)} + u_2y_2^{(n)} + \ldots + u_ny_n^{(n)} + u_1'y_1^{(n-1)} + u_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + u_n'y_n^{(n-1)} \qquad \text{(m)}$$

Thay (a), (b), (c),... (l),..., (m) vào (1) và vì $y_1, y_2, \ldots, y_n$ là nghiệm cơ bản của (2) nên ta được phương trình:

$$u_1'y_1^{(n-1)} + u_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + u_n'y_n^{(n-1)} = f(x) \qquad \text{(m')}$$

Hệ phương trình gồm (a'), (b'),..., (l'), (m') chính là hệ (3) đối với $u_1', u_2', \ldots, u_n'$, có định thức của các hệ số của phương trình chính là định thức Wronskien $W_n(x) \neq 0$ vì hệ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ là hệ nghiệm cơ bản của (2). Do đó $u_1', u_2', \ldots, u_n'$ sẽ được xác định duy nhất:

$$u_1' = \varphi_1(x),\ \ u_2' = \varphi_2(x), \ldots,\ \ u_n' = \varphi_n(x)$$

Lấy tích phân ta có:

$$u_i = \int \varphi_i(x)dx + c_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n\ \ c_i = \text{const}.$$

Thay u_i vào (a) ta có nghiệm tổng quát của (1).

§7. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CẤP CAO VỚI HỆ SỐ HẰNG SỐ

7.1. Phương trình cấp hai

a) Phương trình thuần nhất

Xét phương trình tuyến tính thuần nhất cấp 2 với các hệ số p, q là hằng số:

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (1)$$

Đối với trường hợp p, q là các hàm số của x thì phương trình này nói chung không có cách giải tổng quát (phải biết một nghiệm của nó mới giải được như đã xét ở §6).

Nhưng đối với trường hợp hợp p, q là hằng số thì lại có cách giải hoàn toàn bằng đại số do Euler tìm ra. Cách giải đó được trình bày như sau:

Để giải (1), đầu tiên ta tìm một nghiệm riêng của nó, tìm một nghiệm riêng của (1) tức là tìm một hàm số sơ cấp sao cho đạo hàm thay vào phương trình (1) ta phải được một tổng gồm các số hạng đồng dạng vì như thế mới xảy ra khả năng tổng đó đồng nhất không. Như vậy thì nghiệm riêng phải tìm là một hàm số giữ nguyên dạng khi đạo hàm. Ta biết có một hàm số sơ cấp vẫn giữ nguyên dạng khi đạo hàm là hàm số mũ e^{kx}, k là hằng số. Do đó ta tìm nghiệm riêng của (1) dưới dạng $y = e^{kx}$ (2), k là hằng số xác định sau

Đạo hàm (2): $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$ thay vào (1) ta có:;

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$$

hay $$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

Như vậy muốn (2) là nghiệm của (1) thì k phải là nghiệm của phương trình đại số:

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (3)$$

Phương trình này gọi là phương trình đặc trưng của phương trình (1). Giải phương trình này ta sẽ có k và theo (2) ta có nghiệm riêng phải tìm.

Theo đại số ta biết phương trình (3) có 2 nghiệm là:

$$k_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad k_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

và có thể xảy ra 3 trường hợp sau:

1) $p^2 - 4q > 0$: lúc đó k_1, k_2 là các nghiệm thực khác nhau, theo (2) ta được hai nghiệm riêng tương ứng là:

$$y_1 = e^{k_1 x}\ ;\ y_2 = e^{k_2 x}$$

Hai nghiệm này là độc lập tuyến tính vì

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq c = \text{const}$$

Do đó theo định lý cấu tạo nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất, ta được nghiệm tổng quát (1) là:

$$\boldsymbol{Y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}} \qquad \textbf{(a)}$$

trong đó c_1, c_2 là các hằng số tuỳ ý.

2) $p^2 - 4q = 0$: lúc đó k_1, k_2 là các nghiệm thực bằng nhau $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$, theo (2) ta chỉ được một nghiệm $y_1 = e^{\frac{-p}{2}x}$, nhưng theo cách giải phương trình

tuyến tính, biết một nghiệm riêng thì tìm được nghiệm riêng thứ hai độc lập tuyến tính với y_1:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{\int p dx}}{y_1^2} dx = x\ e^{-\frac{p}{2}x},$$

Do đó nghiệm tổng quát của (1):

$$y = (c_1 + c_2 x)\ e^{-\frac{p}{2}x} \qquad (b)$$

3) $p^2 - 4q < 0$: lúc đó k_1, k_2 là những số phức liên hợp:

$$k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta \text{ trong đó } \alpha = -\frac{p}{2},\ \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

do đó theo (2) ta được 2 nghiệm riêng:

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x},\quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$$

Các nghiệm này ở dạng số phức, thực tế không dùng được. Nhưng từ các nghiệm này và theo các công thức Euler.

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z; \qquad e^{-iz} = \cos z - i \sin z;$$

trong đó z là một số phức tùy ý, ta sẽ tìm được các nghiệm thực (các công thức này sẽ được chứng minh trong bài sau).

Ta viết lại $y_1 = e^{\alpha x} e^{i\beta x}$; $y_2 = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$ theo các công thức Euler ta có:

$$y_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x);\ y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

Xét

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x;\ \bar{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x;$$

Rõ ràng $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ cũng là nghiệm của (1). Hơn nữa $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ là độc lập tuyến tính vì:

$$\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} = \cot g\beta x \neq C = \text{const}$$

Do đó, nghiệm tổng quát của (2) là: $y = c_1\bar{y}_1 + c_2\bar{y}_2$ hay

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x) \qquad (c)$$

Tóm lại, muốn giải phương trình thuần nhất hệ số hằng số (1) ta giải phương trình đặc trưng (2) của nó, sau đó tùy theo các trường hợp mà áp dụng các công thức (a), (b), (c), ta sẽ có nghiệm tổng quát:

Thí dụ:

1) Giải: $3y'' - 2y' - 8y = 0$

Xét phương trình đặc trưng $3k^2 - 2k - 8 = 0$, giải ta có: $k_1 = 2$, $k_2 = -\dfrac{4}{3}$ do đó rơi vào trường hợp 1. Theo công thức (a) ta có nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho là:

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-\frac{4}{3}x}$$

2) Giải: $y'' \quad 2y' + y = 0$

Xét phương trình đặc trưng: $k^2 - 2k + 1 = 0$, phương trình này có nghiệm kép $k = 1$, do đó rơi vào trường hợp 2. Theo công thức (b) ta có nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho là:

$$y = e^x(c_1 + c_2x)$$

3) Giải: $y'' + 4y' + 29y = 0.$

Xét phương trình đặc trưng $k^2 + 4k + 29 = 0$, phương trình này có nghiệm phức $k_1 = -2 + 5i$, $k_2 = -2 - 5i$ do đó rơi vào trường hợp 3, theo công thức (c), nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho là:

$$y = e^{-2x}(c_1\cos 5x + c_2\sin 5x)$$

b) Phương trình không thuần nhất: Xét phương trình tuyến tính cấp hai với các hệ số p, q là hằng số:

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (1)$$

Phương trình này là một trường hợp đặc biệt của phương trình tuyến tính cấp hai, do đó biết một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất tương ứng thì sẽ tìm được nghiệm tổng quát của nó. (Ở mục a) ta đã biết cách tìm một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất với hệ số hằng số).

Thí dụ: Giải

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$$

Đầu tiên giải phương trình thuần nhất $y'' - 2y' + y = 0$ để tìm một nghiệm riêng. Theo thí dụ 2, a), phương trình thuần nhất này có một nghiệm riêng là $y_1 = e^x$. Ta sẽ dùng phép hạ cấp để giải phương trình. Đặt $y = e^x z$, đạo hàm thay vào phương trình không thuần nhất trên, ta đi đến phương trình để tìm z.

$$z'' + \left(-2 + \frac{2e^x}{e^x}\right)z' = \frac{e^x}{e^x(x^2+1)}$$

hay

$$z'' = \frac{1}{x^2+1} \text{ suy ra } z' = \text{arctg}x + c_1.$$

và

$$z = \int arctgxdx + c_1x + c_2 = xarctgx - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c_1x + c_2$$

do đó:

$$y = e^x(c_1x + c_2 + xarctgx - \ln\sqrt{x^2+1})$$

Chú ý:

Nếu phương trình thuần nhất có 2 nghiệm riêng thì lấy một nghiệm nào cũng được trong phương pháp hạ cấp, hoặc dùng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange nếu 2 nghiệm riêng đó là độc lập tuyến tính.

Bây giờ ta chuyển sang xét vài trường hợp đặc biệt của hàm $f(x)$ (vế phải của phương trình (1)). Các trường hợp này cho ta tìm một nghiệm riêng $\bar{y}$ của phương trình không thuần nhất hoàn toàn bằng đại số. Có $\bar{y}$ ta sẽ có nghiệm tổng quát y của phương trình không thuần nhất, vì theo định lý cấu tạo nghiệm tổng quát $y = Y + \bar{y}$, Y là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất hệ số hằng số đã biết cách tìm

$$\boldsymbol{I} .\ \boldsymbol{f(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x}}$$

trong đó

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

là một thức bậc n của x.

Thí dụ:

$f(x) = (x^3 + 3x^2 + 2x + 1)\, e^{-2x}$ thì

$\alpha = -2$, $n = 3$, $P_3(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

$f(x) = (x^4 + 1)\, e^{5x}$ thì $\alpha = 5$, $n = 4$, $P_4(x) = x^4 + 1$ ...

Trong trường hợp này tìm nghiệm riêng $\bar{y}$ của phương trình không thuần nhất dưới dạng:

$\bar{y} = Q_n(x)\, e^{\alpha x}$ trong đó $Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$ là một đa thức bậc n của X nếu xác định được $b_0, b_1, \ldots, b_n$ thì ta sẽ có $Q_n(x)$ và có $\bar{y}$. Ta xác định chúng như sau:

Đạo hàm:

$$\bar{y}' = Q_n'(x)e^{\alpha x} + \alpha Q_n(x)e^{\alpha x}$$

$$\bar{y}'' = Q_n''(x)e^{\alpha x} + 2\alpha Q_n'(x)e^{\alpha x} + \alpha^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$$

thay vào (1) và nhóm hợp lại ta có:

$$e^{\alpha x}[Q_n'' + (2\alpha + p)Q_n' + (\alpha^2 + \alpha p + q)Q_n] \equiv P_n(x)e^{\alpha x}$$

hay $$[Q_n'' + (2\alpha + p)Q_n' + (\alpha^2 + \alpha p + q)Q_n] \equiv P_n(x) \qquad (2)$$

Đây là một đồng nhất thức: hai đa thức đồng nhất nhau, có thể xảy ra các trường hợp sau:

Nếu $\alpha^2 + \alpha p + q \neq 0$, nghĩa là α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng, lúc đó vế phải và vế trái của (2) là hai đa thức cùng bậc n, vế phải hệ số đã biết, vế trái hệ số phụ thuộc: $b_0, b_1, ..., b_n$ phải xác định. Đồng nhất hệ số của cùng lũy thừa của x ở 2 vế ta sẽ có một hệ $n + 1$ phương trình để xác định $n + 1$ ẩn số $b_0, b_1, ..., b_n$. Nếu $\alpha^2 + \alpha p + q = 0$ nhưng $2\alpha + p \neq 0$ nghĩa là α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng, lúc đó vế trái của (2) là đa thức bậc $n - 1$, vế phải bậc n, hai đa thức đó không thể cho đồng nhất nhau được. Để đồng nhất được, thì vế trái của (2) vẫn phải là đa thức bậc n, muốn thế ta tìm $\bar{y}$ dưới dạng $xQ_n(x)\, e^{\alpha x}$, vì đạo hàm thay vào ta được vế trái của (2) vẫn là một đa thức bậc n.

Nếu $\alpha^2 + \alpha p + q = 0$, $2\alpha + p = 0$, nghĩa là α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng, lúc đó vế trái của (2) là một đa thức bậc $n - 2$ không thể cho đồng nhất với vế phải có bậc n được, tương tự như trường hợp trước, trong trường hợp này ta phải tìm $\bar{y}$ dưới dạng

$$\bar{y} = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$$

Tóm lại: ***Nếu $f(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x}$ thì tìm $\bar{y}$ dưới dạng:***

$$\bar{y} = x^{\lambda} Q_n(x)e^{\alpha x}$$

với

$$\begin{cases} \lambda = 0: & \textit{nếu } \alpha \textit{ không là nghiệm} \\ \lambda = 1: & \textit{nếu } \alpha \textit{ là nghiệm đơn} \\ \lambda = 2: & \textit{nếu } \alpha \textit{ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng} \end{cases}$$

Thí dụ:

1) Giải:

$$y'' + 9y = (x^2 + 1)\, e^{3x}$$

Đầu tiên tìm nghiệm tổng quát Y của phương trình thuần nhất: $y'' + 9y = 0$, nó có phương trình đặc trưng $k^2 + 9 = 0$, nghiệm là $k = \pm 3i$, do đó $Y = c_1\cos 3x + c_2 \sin 3x$.

Bây giờ tìm $\bar{y}$, ở đây $\alpha = 3$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, $n = 2$, $P_2 = x^2 + 1$, do đó ta tìm y dưới dạng:

$$\bar{y} = Q_2(x)e^{3x} = (ax^2 + bx + c)e^{3x}$$

Đạo hàm

$$\bar{y}' = (2ax + b)e^{3x} + 3(ax^2 + bx + c)e^{3x}$$

$$\overline{y''} = 2ae^{3x} + 6(2ax + b)e^{3x} + 9(ax^2 + bx + c)e^{3x}.$$

Thay vào phương trình, nhóm họp và đơn giản 2 vế cho e^{3x} ta có:

$$18ax^2 + (18b + 12a)x + 2a + 6b + 18c \equiv x^2 + 1.$$

Đồng nhất hệ số của x^2 ở 2 vế ta được: $18a = 1$.

Đồng nhất hệ số của x ở 2 vế ta được: $18b + 12a = 0$.

Đồng nhất hệ số tự do ở 2 vế ta được: $2a + 6b + 18c = 1$.

Suy ra:

$$a = \frac{1}{18};\quad b = -\frac{1}{27};\quad c = \frac{5}{81};$$

Vậy ta được:

$$\bar{y} = (\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81})e^{3x}$$

và nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y = Y + \bar{y} = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + (\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81})e^{3x}$$

2) Giải $y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x)$

Ở đây phương trình đặc trưng là $k^2 - 3k + 2 = 0$ có nghiệm $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Do đó $Y = c_1e^x + c_2e^{2x}$.

Còn $\alpha = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng, $n = 1$, $P_1 = 3 - 4x$. Do đó ta tìm

$$\bar{y} = x(ax + b)\, e^x.$$

Đạo hàm $\bar{y}' = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x$ và

$$\bar{y}'' = 2ae^x + (4ax + 2b)e^x + (ax^2 + bx)e^x.$$

Thay vào phương trình, rút gọn và đơn giản 2 vế cho e^x ta có:

$$-2ax + 2a - b = -4x + 3.$$

Suy ra $2a = -4$, $2a - b = 3$ hay $a = 2$, $b = 1$.

Do đó $\bar{y} = x(2x + 1)\, e^x$ và

$$y = Y + \bar{y} = c_1e^x + c_2e^{2x} + x(2x + 1)e^x.$$

II. $f(x) = [P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$ (1)

trong đó $P_n(x)$, $Q_m(x)$ là những đa thức bậc n và m. Để tìm $\bar{y}$ người ta đổi $\cos\beta x$, $\sin\beta x$ ra thành các hàm số mũ theo các công thức Euler, lúc đó $f(x)$ sẽ có dạng I. Áp dụng kết quả ở đó, sau lại trở lại dạng lượng giác, người ta đi đến kết quả là ***trong trường hợp này, ta phải tìm $\bar{y}$ dưới dạng:***

$$\bar{y} = x^{\lambda}[R_p(x)\cos\beta x + S_p(x)\sin\beta x]e^{\alpha x} \qquad (2)$$

trong đó $R_p(x)$, $S_p(x)$ là những đa thức bậc p của x, p = max(n, m), còn $\lambda = 0$ nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng. $\lambda = 1$ nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng. (Ở đây không có trường hợp $\lambda = 2$ như ở *I* vì phương trình đặc trưng là bậc 2 có nghiệm phức thì ta có 2 nghiệm phức liên hợp, chứ không có nghiệm kép) chẳng hạn

$$f(x) = [(x^3 + 3x + 1)\cos 2x + (x^2 + 1)\sin 2x]e^{-3x}$$

ở đây $\alpha \pm i\beta = -3 \pm 2i$ giả sử không là nghiệm của phương trình đặc trưng thì đặt:

$$y = [(ax^3 + bx^2 + cx + d)\cos 2x + (a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1)\sin 2x]e^{-3x}$$

Đặc biệt một trong các đa thức $P_m(x)$, $Q_m(x)$ có thể đồng nhất không, nghĩa là $f(x)$ có dạng:

$$f(x) = P_n(x)\cos\beta x e^{\alpha x}$$

hay $$f(x) = Q_m(x)\sin\beta x e^{\alpha x}$$

lúc đó ta vẫn tìm $\bar{y}$ dưới dạng trên. Chẳng hạn

$$f(x) = (x^2 + 2x)\cos 3x.e^{-x}$$

ở đây $\alpha \pm i\beta = -1 \pm 3i$ giả sử là nghiệm của phương trình đặc trưng thì đặt:

$$\bar{y} = x[(ax^2 + bx + c)\cos 3x + (a_1x^2 + b_1x + c_1)\sin 3x]e^{-x}$$

$f(x) = 5\sin 4x$, ở đây $\alpha \pm i\beta = 0 \pm 4i$,

giả sử không là nghiệm của phương trình đặc trưng thì đặt:

$$\bar{y} = a\cos 4x + b\sin 4x.$$

($f(x) = P_0(x)\sin 4x$, $P_0(x) = 5$: hằng số coi như đa thức bậc không). Bây giờ xét một số thí dụ cụ thể.

Thí dụ:

1) Giải: $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$.

Đầu tiên giải phương trình thuần nhất $y'' + 2y' + 5y = 0$. Phương trình này có phương trình đặc trưng: $k^2 + 2k + 5 = 0$. Giải ta có:

$$k_1 = -1 + 2i,\ k_2 = -1 - 2i. \text{ Do đó:}$$

$$Y = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x).$$

Bây giờ tìm $\bar{y}$, ở đây $f = 2\cos x = P_0(x)\cos x e^{0x}$, nên $\alpha \pm i\beta = 0 \pm i$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng, do đó ta tìm $\bar{y} = a\cos x + b\sin x$. Đạo hàm:

$$\bar{y}' = -a\sin x + b\cos x, \qquad \bar{y}'' = -a\cos x - b\sin x$$

Thay vào phương trình ta có:

$$-a\cos x - b\sin x + 2(-a\sin x + b\cos x) + 5(a\cos x + b\sin x) = 2\cos x.$$

hay

$$(4a + 2b)\cos x + (4b - 2a)\sin x = 2\cos x.$$

Đồng nhất hệ số của $\cos x$, $\sin x$ ở hai vế ta có:

$$4a + 2b = 2,\ 4b - 2a = 0, \text{ suy ra } a = \frac{2}{5},\ b = \frac{1}{5}$$

Vậy

$$\bar{y} = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$$

và $y = Y + \bar{y} = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) + \dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\sin x$

2) Giải: $y'' + y = 4x\sin x$.

Ở đây phương trình đặc trưng là $k^2 + 1 = 0$, có nghiệm $k = \pm i$. Do đó $Y = c_1\cos x + c_2\sin x$. Còn $f(x) = 4x\sin x = Q_1(x)\sin x e^{0x}$, nên $\alpha + i\beta = 0 \pm i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, vậy phải tìm:

$$\bar{y} = x[(ax + b)\cos x + (a_1x + b_1)\sin x]$$

hay

$$\bar{y} = (ax^2 + bx)\cos x + (a_1x^2 + b_1x)\sin x$$

Đạo hàm thay vào phương trình nhóm họp lại ta có:

$$(4a_1x + 2a + 2b_1)\cos x + (-4ax + 2a_1 - 2b)\sin x = 4x\sin x.$$

Đồng nhất hệ số của $\cos x$, $\sin x$ ở hai vế ta có:

$$\begin{cases} 4a_1x + 2a + 2b_1 \equiv 0 \\ -4ax + 2a_1 - 2b \equiv 4x \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 4a_1 = 0, \quad 2a + 2b_1 = 0 \\ -4a = 4, \quad 2a_1 - 2b = 0 \end{cases}$$

Suy ra $a = -1$, $b = 0$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$. Vậy $\bar{y} = x(-x\cos x + \sin x)$ và

$y = Y + \bar{y} = c_1\cos x + c_2\sin x + x(-x\cos x + \sin x)$

Chú ý:

Nếu

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

mà $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... , $f_n(x)$ thuộc dạng I, II thì theo phương pháp trên ta sẽ tìm các nghiệm riêng $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$ tương ứng với $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$. Theo nguyên lý xếp chồng nghiệm ta sẽ có:

$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \dots + \bar{y}_n$ ***ứng với $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$.***

3) Giải: $\qquad y'' + 2y' + 5y = 2\cos x + 8e^x.$

Ta thấy vế phải là tổng của $f_1(x) = 2\cos x$ và $f_2(x) = 8e^x$ thuộc hai dạng trên. Theo thí dụ 1, ở trên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $Y = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$ và nghiệm riêng ứng với $f_1(x) = 2\cos x$ là:

$$\bar{y}_1 = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$$

Bây giờ còn tìm $\bar{y}_2$ ứng với $f_2(x) = 8e^x$. Ở đây $\alpha = 1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (vì phương trình đặc trưng có nghiệm phức $-1 \pm 2i$) nên tìm $\bar{y}_2 = ae^x$. Đạo hàm thay vào phương trình ta được:

$$ae^x + 2ae^x + 5ae^x = 8e^x \text{ suy ra } a = 1.$$

và

$$\bar{y}_2 = e^x. \text{ Do đó:}$$

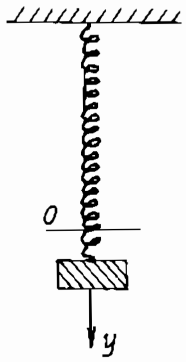
$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x + e^x$$

Vậy

$$y = Y + \bar{y} = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x + e^x$$

4) *Dao động đơn giản*: Xét một lò xo để thẳng đứng (trọng lượng không đáng kể) đầu trên cố định, đầu dưới treo một vật khối lượng m (H 192)

Tìm quy luật dao động của vật. Để giải bài toán, ta chọn gốc tọa độ O ở đầu tự do của lò xo (khi chưa treo vật) và trục Oy hướng thẳng đứng từ trên xuống dưới, khi treo vật vào đầu dưới lò xo, vật sẽ dao động xung quanh điểm O theo phương của trục Oy. Giả sử tại thời điểm t, $y(t)$ là khoảng cách từ vật đến gốc tọa độ O.



Hình 192

Rõ ràng vật chịu tác dụng của ba lực đồng phương với phương của trục Oy.

Trọng lực: mg (g là gia tốc trọng trường).

Lực kéo của lò xo: $-\mu y$ ($\mu > 0$ là hệ số tỷ lệ, đặc trưng cho tính chất kim loại của lò xo, (dấu - chỉ lực có hướng ngược hướng với hướng chuyển động của vật: Định luật Hooke).

Lực cản của môi trường $-\lambda y'$ ($\lambda > 0$ là hệ số tỷ lệ đặc trưng cho tính chất của môi trường (dấu - chỉ hướng của vận tốc chuyển động của vật ($V = y'$) ngược với hướng của lực cản).

Theo định luật Newton, ta có phương trình chuyển động của vật là: $my'' = -\mu y - \lambda y' + mg$ hay

$$y'' + py' + q^2y = g \quad (1) \text{ với } \quad p = \frac{\lambda}{m} > 0; \quad q^2 = \frac{\mu}{m} > 0 .$$

Phương trình đặc trưng của (1): $k^2 + pk + q^2 = 0$ có nghiệm là:

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q^2}}{2}.$$

Giả sử $p^2 < 4q^2$ thì các nghiệm này là các số phức:

$$k_{1,2} = -\alpha \pm i\beta, \ \alpha = \frac{p}{2} > 0, \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4q^2 - p^2}$$

và nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng của (1) là:

$$Y = e^{-\alpha t}(c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t).$$

Rõ ràng $\bar{y} = \dfrac{g}{q^2}$ là một nghiệm riêng của (1) (thử trực tiếp). Vậy nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y(t) = e^{-\alpha t}(c_1 \cos\beta t + c_2\sin\beta t) + \frac{g}{q^2}$$

Ta thấy $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = \dfrac{g}{q^2}$, nghĩa là phương trình (1) miêu tả một dao động tắt dần của vật.

Bây giờ xét vật chịu tác dụng thêm một ngoại lực nữa: msint (cùng phương với phương chuyển động) và lực cản của môi trường không đáng kể, khi đó ta có phương trình

$z'' + q^2z = \sin t$ (2) với $z = y - \frac{g}{q^2}$. Dễ dàng thấy nếu $q^2 \neq 1$, thì một nghiệm riêng của (2) có dạng: $A\sin t + B\cos t$, nó biểu thị sự dao động của vật gọi là dao động điều hòa, nếu $q^2 = 1$, thì một nghiệm riêng của (2) có dạng: $-\frac{t}{2}\cos t$. Trong trường hợp này: tần số của ngoại lực trùng với tần số dao động khi không có ngoại lực, biên độ của dao động tăng theo thời gian, hiện tượng này gọi là hiện tượng cộng hưởng.

7.2. Phương trình cấp n

a) Phương trình thuần nhất

$$L[y] = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0 \ \ (1),\ a_i = \text{const},\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Suy rộng các kết quả của phương trình thuần nhất cấp hai đối với phương trình thuần nhất cấp n (1) ta có: phương trình đặc trưng của nó:

$$k^n + a_1k^{n-1} + \dots + a_{n-1}k + a_n = 0 \qquad (2)$$

I. Nếu $k_1, k_2, \dots, k_n$ là nghiệm thực khác nhau của (2) thì nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x} + \dots + c_ne^{k_nx}.$$

II. Nếu $k_1, k_2, \dots, k_n$ là nghiệm khác nhau của (2) trong đó có những nghiệm phức, giả sử $k_1 = \alpha + i\beta$ là một nghiệm phức thì $k_2 = \alpha - i\beta$ cũng là một nghiệm của (2), hai nghiệm này ứng với hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính: $y_1 = e^{\alpha x}.\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}.\sin\beta x$.

III. Trong số các nghiệm riêng của phương trình đặc trưng (2) có những nghiệm bội.

Nếu k_1 là một nghiệm thực bội m, thì nghiệm này ứng với m nghiệm riêng độc lập tuyến tính của (1).

$$e^{k_1x} \quad xe^{k_1x} \quad \dots x^{m-1}e^{k_1x}.$$

Nếu $k_1 = \alpha + i\beta$ là một nghiệm phức bội m của (2) thì $k_2 = \alpha - i\beta$ (số phức liên hợp của k_1), cũng là một nghiệm phức bội m của (2), khi đó k_1, k_2 ứng với $2m$ nghiệm riêng độc lập tuyến tính của (1).

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x\,e^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{m-1}\,e^{\alpha x}\cos\beta x.$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ x\,e^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, x^{m-1}\,e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Thí dụ:

1) Giải phương trình: $y''' - 2y'' + 4y' - 8 = 0$.

Ta có phương trình đặc trưng $k^3 - 2k^2 + 4k - 8 = 0$. Giải ta có $k_1 = 2$, $k_2 = 2i$, $k_3 = -2i$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho:

$$y = c_1e^{2x} + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x.$$

2) Giải phương trình: $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$.

Ta có $k^3 - 5k^2 + 8k - 4 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 2$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y = c_1e^x + e^{2x}(c_2 + c_3x).$$

3) Giải phương trình: $y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$.

Phương trình đặc trưng: $k^4 + 4k^3 + 8k^2 + 8k + 4 = 0$ có nghiệm $k_1 = k_2 = -1 + i$, $k_3 = k_4 = -1 - i$ ứng với hệ nghiệm cơ bản của phương trình đã cho

$$y_1 = e^{-x}\cos x,\ y_2 = xe^{-x}\cos x,\ y_3 = e^{-x}\sin x,\ y_4 = xe^{-x}\sin x.$$

và nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = e\,[(c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\sin x].$$

b) Phương trình không thuần nhất

$$L[y] = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = f(x) \quad (1) \quad a_i = \text{const}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Trong trường hợp chung ta có thể dùng phương pháp biến thiên hằng số của Lagrange để giải (1) vì theo a) ta đã biết được hệ nghiệm cơ bản của phương trình thuần nhất tương ứng $L[y] = 0$.

Trong trường hợp $f(x)$ có dạng đặc biệt *I*, *II* của phương trình cấp hai ở 7.1 thì cách tìm nghiệm riêng $\tilde{y}$ của (2) hoàn toàn tương tự như đã làm ở 7.1.

Thí dụ:

1) Giải phương trình: $y^{(4)} - y = 4e^x$ (1).

Phương trình đặc trưng $k^4 - 1 = 0$ hay $(k^2 + 1)(k^2 - 1) = 0$. Do đó $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = i$, $k_4 = -i$ và nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$Y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x.$$

ở đây $f(x) = 4e^x$, $P_0 = 4$, $\alpha = 1$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, vậy ta tìm nghiệm riêng của phương tình (1) dưới dạng: $\overline{y} = axe^x$

Đạo hàm thay vào phương trình (1) và đơn giản ta có: $4ae^x = 4e^x$ hay $a = 1$ và ta có $\tilde{y} = xe^x$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (1) là:

$$y = xe^x + c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x.$$

2) Giải phương trình: $y^{(4)} + 2y'' + y = \cos x$ (1)

Phương trình đặc trưng: $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$ hay $(k^2 + 1)^2 = 0$ và $k_1 = k_2 = i$, $k_3 = k_4 = -i$ ứng với hệ nghiệm cơ bản: $\cos x$, $x\cos x$, $\sin x$, $x\sin x$.

Ở đây $f(x) = \cos x$, $P_0 = 1$. $\alpha \pm i\beta = 0 \pm i$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng. Do đó nghiệm riêng $\bar{y}$ của (1) có dạng:

$$\bar{y} = x^2(a\cos x + b\sin x).$$

Đạo hàm thay vào (1) ta sẽ xác định được a, b: $a = -\frac{1}{8}$, $b = 0$. Vậy $\bar{y} = -\frac{x^2}{8}\cos x$ và nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y = -\frac{x^2}{8}\cos x + (c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\sin x.$$

*7.3. Phương trình đưa về phương trình với hệ số hằng số

Phương trình Euler: ***Phương trình Euler là phương trình có dạng:*** $(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x)$ ***(1) với a, b, a_i (i = 1, 2, ... , n) là những hằng số. Đối với miền ax + b > 0, dùng phép thế biến: $ax + b = e^t$ thì***

$$x = \frac{1}{a}e^t - \frac{b}{a},\quad x'_t = \frac{1}{a}e^t,\quad t'_t = \frac{1}{x'_t} = \frac{a}{e^t} = ae^{-t}$$

$$y'_x = y'_t . t'_x = \frac{dy}{dt}ae^{-t} = ae^{-t}\frac{dy}{dt}$$

$$y''_{x^2} = (ae^{-t}\frac{dy}{dt})'_t . t'_x = (ae^{-t}\frac{d^2y}{dt^2} - ae^{-t}\frac{dy}{dt})ae^{-t} = a^2e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})$$

Tương tự:

$$y'''_{x^3} = a^3e^{-3t}(\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{3d^2y}{dt^2} + \frac{2dy}{dt}) \dots$$

Thay vào phương trình Euler (1), ta thấy phương trình này biến thành phương trình không thuần nhất cấp n với hệ số hằng số, đã biết cách giải. Trong miền $ax + b < 0$ thì ta đặt $ax + b = -e^t$.

Thí dụ: Giải phương trình Euler:

$$(x+1)^2y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0 \quad ((x+1) > 0)$$

Đặt $x + 1 = e^t$ ($x > -1$), ta có $y' = e^{-t}\dfrac{dy}{dt}$.

$$y'' = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

Thay vào phương trình:

$$e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) - 2e^t.e^{-t}\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

hay
$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là: $y = c_1e^t + c_2e^{2t}$ trở lại $t = \ln(x+1)$. Ta có

$$y = c_1(x+1) + c_2(x+1)^2.$$

Đặc biệt nếu phương trình Euler (1) có dạng:

$$x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}xy' + a_ny = 0 \qquad (2)$$

Ta có thể giải trực tiếp, bằng cách tìm nghiệm của (2) dưới dạng: $y = x^k$ với $x > 0$, $k \in R$. Đạo hàm, thay vào (2), ta được một phương trình để định k, gọi là phương trình đặc trưng của (2).

$$k(k-1)...(k-n+1) + k(k-1)...(k-n+2) + ... + ka_{n-1} + a_n = 0 \quad (3)$$

Đây là một phương trình đại số bậc n với ẩn số k, nếu k là một nghiệm thực, bội m của (3) thì nó ứng với m nghiệm độc lập tuyến tính của (2):

$$x^k, x^k\ln x, x^k(\ln x)^2, ..., x^k(\ln x)^{m-1}.$$

nếu $k = \alpha \pm i\beta$ là một cặp nghiệm phức liên hợp bội m của (3) thì cặp này ứng với $2m$ nghiệm độc lập tuyến tính của (2):

$$x^{\alpha}\cos(\beta\ln x),\ x^{\alpha}\ln x\cos(\beta\ln x),\ldots,\ x^{\alpha}(\ln x)^{m-1}\cos(\beta\ln x)$$

$$x^{\alpha}\sin(\beta\ln x),\ x^{\alpha}\ln x\sin(\beta\ln x),\ldots,\ x^{\alpha}(\ln x)^{m-1}\sin(\beta\ln x)$$

Thí dụ:

Giải phương trình: $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$.

Đặt $y = x^k$, đạo hàm thay vào phương trình ta được: $k^2 - 4k + 4 = 0$ và $k_1 = k_2 = 2$. Vậy theo trên, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là: $y = c_1x^2 + c_2x^2\ln x$.

§8. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

8.1. Định nghĩa – Bài toán Cauchy

a) Bài toán mở đầu: Ta đã xét các bài toán đưa đến việc giải một phương trình vi phân với những điều kiện nào đó, trong thực tế cũng có nhiều bài toán đưa đến việc giải một hệ phương trình vi phân với những điều kiện nào đó. Chẳng hạn, xét một chất điểm M có khối lượng m chuyển động trong không gian, dưới tác dụng của lực $\vec{F}$ mà hình chiếu của nó trên các trục tọa độ: P, Q, R là phụ thuộc thời gian t, phụ thuộc các tọa độ x, y, z của M và vận tốc của M tại t hay các hình chiếu $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ của vecteur vận tốc trên các trục tọa độ, nghĩa là:

$$P = f_1\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

$$Q = f_2\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

$$R = f_3\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

Giả sử phải tìm quy luật chuyển động của M, nghĩa là phải tìm sự phụ thuộc của các tọa độ x, y, z của M theo thời gian t.

Theo định luật Newton ta có: $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ hay

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Q, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = R$$

nghĩa là phải giải hệ phương trình vi phân:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} f_1\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{m} f_2\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{m} f_3\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

để tìm các hàm $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

b) Định nghĩa

Hệ phương trình vi phân là một tập hợp các phương trình liên hệ giữa biến độc lập, một số hàm số phải tìm và đạo hàm của chúng; cấp của hệ phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm trong hệ. Hệ phương trình vi phân cấp một dạng chính tắc là hệ có dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

trong đó x là biến độc lập $y_1, y_2, \ldots, y_n$ là các ẩn hàm. Cho một hệ phương trình vi phân cấp n, ta luôn luôn có thể đưa thêm các ẩn hàm phụ và các phương trình khác để đưa hệ về hệ phương trình vi phân cấp một. Chẳng hạn, phương trình cấp n: $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ là tương đương với hệ:

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3, \ldots, \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n$$

$$f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \frac{dy_n}{dx}) = 0$$

với $y = y_1$ và nếu phương trình cuối giải ra được đối với $\frac{dy_n}{dx}$ thì ta có hệ chính tắc (1).

Vì lý do trên, không kém phần tổng quát, ta chỉ nghiên cứu hệ chính tắc (1).

Tập hợp các hàm $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ gọi là nghiệm của hệ (1) nếu thay chúng vào hệ ta được các đồng nhất thức. Mỗi nghiệm của hệ (1) tương ứng một đường cong trong không gian n + 1 chiều (R^{n+1}) gọi là một đường cong tích phân của hệ.

Bài toán tìm nghiệm của hệ (1) thỏa mãn các điều kiện:

$$y_1\big|_{x=x_0} = y_{10}, \quad y_2\big|_{x=x_0} = y_{20}, \ldots, y_n\big|_{x=x_0} = y_{n0} \qquad (2)$$

gọi là bài toán Cauchy của hệ đó, các điều kiện (2) gọi là điều kiện ban đầu, sơ kiện hay điều kiện Cauchy.

c) Định lý tồn tại duy nhất

Nếu các hàm $f_1, f_2, \ldots, f_n$ (các vế phải của hệ (1)) là liên tục cùng các đạo hàm riêng của chúng, đối với các đối số $y_1, y_2, \ldots, y_n$ trong lân cận X của điểm $(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}) \in R^{n+1}$ thì tồn tại duy nhất một nghiệm của hệ (1) trong lân cận của x_0 thỏa mãn điều kiện ban đầu (2).

Nghiệm của bài toán Cauchy của hệ (1) gọi là nghiệm riêng của hệ đó.

Nghiệm tổng quát của hệ (1) trong một miền nào đó là tập hợp n hàm liên tục, khả vi trong miền đó và phụ thuộc n hằng số tùy ý $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$y_1 = y_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$y_2 = y_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = y_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

thỏa mãn các điều kiện:

1) Là nghiệm của hệ (1) $\forall c_1, c_2, ..., c_n$.

2) Cho điều kiện (2) thì xác định được $c_1, c_2, ..., c_n$ duy nhất. Nghiệm của hệ (1) không thỏa mãn điều kiện của định lý tồn tại duy nhất thì gọi là nghiệm bất thường của hệ. Nếu từ hệ:

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n, c_1, c_2, ..., c_n) = 0 \qquad (4)$$

ta xác định được nghiệm tổng quát (3) của hệ (1) thì hệ (4) gọi là tích phân tổng quát của hệ đó và mỗi φ_i $(i = 1, 2, ..., n)$ gọi là một tích phân đầu của hệ. Hệ có dạng:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, ..., x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, ..., x_n)} = ... = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, ..., x_n)}$$

gọi là hệ đối xứng, hệ này tương đương với hệ chính tắc

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1}{X_n}, \quad \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}, ..., \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n}$$

và ngược lại hệ chính tắc (1) có thể đưa về hệ đối xứng

$$\frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = ... = \frac{dy_n}{f_n} = \frac{dx}{1}$$

8.2. Giải hệ phương trình vi phân

a) Phương pháp khử: Xét hệ chính tắc (1). Đạo hàm theo x, phương trình đầu của hệ (1):

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + ... + \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}$$

thay $\frac{dy_1}{dx} ... \frac{dy_n}{dx}$ bởi các biểu thức $f_1, f_2, ..., f_n$ ở hệ (1) ta được:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, ..., y_n)$$

Lại lấy đạo hàm phương trình này và làm như trên ta được phương trình :

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, \ldots, y_n)$$

tiếp tục quá trình, cuối cùng ta được phương trình:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

Vậy ta có hệ:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} = F_1(x, y_1, \ldots, y_n)\\
&\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x_1, y_1, \ldots, y_n) \qquad (5)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, \ldots, y_n)
\end{aligned}$$

Từ $n - 1$ phương trình đầu của hệ này ta giải $y_2, y_3, \ldots, y_n$ theo x, y_1 và

$$\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y_1}{dx^n}$$

ta được

$$\begin{aligned}
&y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)})\\
&y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}) \qquad (6)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)})
\end{aligned}$$

Thay (6) vào phương trình cuối cùng của (5) ta được một phương trình cấp n đối với y_1:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}) \qquad (7)$$

Giải phương trình (7) ta được:

$$y_1 = \varphi_1 (x, c_1, c_2, ..., c_n) \qquad (8)$$

Lấy đạo hàm (8), $n-1$ lần ta được:

$$\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, ..., \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$$

là các hàm của x, c_1, c_2,...,c_n. Thay thế các hàm này vào (6) ta xác định được y_2,...y_n:

$$\begin{aligned} y_2 &= \psi(x, c_1, c_2, ..., c_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \psi(x, c_1, c_2, ..., c_n) \end{aligned} \qquad (9)$$

Như vậy (8) và (9) sẽ cho nghiệm tổng quát của hệ (1).

Thí dụ:

Giải bài toán Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{z} \\ z' = \dfrac{1}{y-x} \end{cases} \qquad (a)$$

$$y\big|_{x=0} = -1, \quad z\big|_{x=0} = 1 \qquad (b)$$

Từ $z' = \dfrac{1}{y-x}$ ta có $z'' = \dfrac{-1}{(y-x)^2}(y'-1)$ (c)

Từ (a) ta có: $y' - 1 = -\dfrac{1}{z}$, và theo trên $(y-x) = \dfrac{1}{z'}$. Thay vào (c) ta được: $z'' = z'^2 . \dfrac{1}{z}$ do đó

$$\frac{z''}{z'} = \frac{z'}{z}, \quad z' = c_1.z, \quad z = c_2e^{c_1x}$$

Do đó, từ phương trình thứ hai của (a):

$$y - x = \frac{1}{z'} \quad \text{hay} \quad y = x + \frac{1}{c_1c_2}e^{-c_1x}$$

Vậy nghiệm của hệ (a) là:

$$\begin{cases} y = x + \dfrac{1}{c_1c_2}e^{-c_1x} \\ z = c_2e^{c_1x} \end{cases} \qquad \text{(d)}$$

Cho thỏa mãn (b) $-1 = \dfrac{1}{c_1c_2}$, $1 = c_2$. Do đó $c_1 = -1$, $c_2 = 1$ và nghiệm của bài toán Cauchy (a), (b) là:

$$y = x - e^x, \; z = e^{-x}.$$

Theo định nghĩa nghiệm tổng quát thì (d) là nghiệm tổng quát của (a).

Chú ý: Phương pháp khử trên có thể áp dụng cho một hệ phương trình vi phân cấp n bất kỳ.

Thí dụ: Giải bài toán Cauchy:

$$\begin{cases} y''-z = 0 \\ z''-y = 0 \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

$$y\big|_{x=0} = z\big|_{x=0} = y'\big|_{x=0} = 1, \quad z'\big|_{x=0} = 0 \qquad \text{(b)}$$

Đạo hàm phương trình đầu của (a) hai lần và thay $z'' = y$ từ phương trình cuối của (a), ta được: $y^{(4)} - y = 0$. Nghiệm tổng của phương trình này là:

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x \qquad \text{(c)}$$

Vì $z = y''$ (theo phương trình đầu của (a)), nên

$$z = c_1e^x + c_2e^{-x} - c_3\cos x - c_4\sin x \qquad \text{(d)}$$

Vậy hệ (a) có nghiệm được xác định bởi (c), (d) cho thỏa mãn điều kiện (b).

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 + c_3 \\ 1 = c_1 + c_2 - c_3 \\ 1 = c_1 - c_2 + c_4 \\ 0 = c_1 - c_2 - c_4 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất $c_1 = \frac{3}{4}$, $c_2 = \frac{1}{4}$, $c_3 = 0$, $c_4 = \frac{1}{2}$. Vậy ta có nghiệm của bài toán Cauchy (a), (b):

$$y = \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x \qquad z = \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x$$

và nghiệm tổng quát của (a) được xác định bởi (c), (d).

b) Phương pháp tổ hợp

Nếu từ một số phương trình của hệ phương trình vi phân ta tìm được một hay một số tích phân đầu của hệ và từ đó ta tìm được tích phân tổng quát của hệ thì phương pháp này gọi là phương pháp tổ hợp tích phân hệ phương trình vi phân. Phương pháp này rất có hiệu lực đối với hệ ở dạng đối xứng.

Thí dụ:

Giải hệ

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}, \quad (x \neq y \neq z \neq 0)$$

ta có:

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{dx+dy+dz}{0}$$

Do đó: $dx + dy + dz = 0$ hay $d(x+y+z) = 0$ và $x + y + z = c_1$.

Bây giờ cũng từ hệ đã cho, ta có:

$$\frac{2xdx}{2x(z-y)} = \frac{2ydy}{2y(x-z)} = \frac{2zdz}{2z(y-x)} = \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{0}$$

Do đó $x^2 + y^2 + z^2 = c_2$. Vậy $x + y + z = c_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = c_2$ là tích phân tổng quát của hệ dã cho.

*8.3. Hệ phương trình vi phân tuyến tinh cấp một

a) Khái niệm cơ bản

Hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp một là hệ có dạng:

$$\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x)\\
y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x)
\end{aligned}$$

trong đó $y_1, y_2, \ldots, y_n$ là các ẩn hàm.

$$a_{ij}(x),\ \ (i, j = 1, 2, \ldots, n),\ f_i(x),\ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

là các hàm số của x xác định trong miền X.

$a_{ij}(x)$ gọi là các hệ số của hệ phương trình đặc biệt a_{ij}= const thì hệ phương trình gọi là hệ phương trình tuyến tính cấp một với hệ số hằng số, nếu $f_i(x) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $\forall x \in X$ thì hệ phương trình gọi là hệ thuần nhất , ngược lại nếu $f_i(x) \neq 0$ thì hệ gọi là hệ không thuần nhất.

Bây giờ xét A là ma trận các hệ số của hệ phương trình.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

và các ma trận cột:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \ldots. \\ y_n(x) \end{pmatrix} \quad Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \ldots. \\ y_n'(x) \end{pmatrix} \quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \ldots. \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Theo định nghĩa tích của hai ma trận thì:

$$AY = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{pmatrix}$$

Vậy hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp một không thuần nhất viết được dưới dạng ma trận:

$$Y' = AY + F \qquad (1)$$

và hệ thuần nhất tương ứng có dạng: $Y' = AY$ (1')

Giả sử các hàm (hệ số của hệ phương trình) $a_{ij}(x)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) liên tục trong miền X, thì theo định lý tồn tại duy nhất hệ (1) hay (1') có nghiệm duy nhất: $Y = Y(x)$ xác định trong miền X và thỏa mãn điều kiện ban đầu:

$$Y\big|_{x=x_0} = Y_0 \qquad (2)$$

Y_0 là vecteur cột có các tọa độ $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ với $x_0 \subset X$ và $\forall Y_0$.

Rõ ràng mọi nghiệm của hệ (1) hay (1') đều là nghiệm riêng vì các hệ đó không có nghiệm bất thường. Hệ thuần nhất (1') luôn luôn có nghiệm $Y \equiv 0$ thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$Y\big|_{x=x_0} = 0$$

Tương tự như trường hợp phương trình tuyến tính cấp n ta có:

Định lý 1:

Nếu các vecteur $Y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ là các nghiệm của hệ thuần nhất (1') thì

$$Y = c_1Y_1 + c_2Y_2 + \dots + c_nY_n. \ \forall c_1, c_2, \dots, c_n \in R$$

cũng là nghiệm của hệ đó.

Định nghĩa:

Hệ vecteur nghiệm $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ độc lập tuyến tính của (1') gọi là một nghiệm cơ bản của nó.

Định lý 2:

Điều kiện cần và đủ để hệ vecteur $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ là một hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất (1') là định thức Wronski:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \ldots & y_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall\, x \in X .$$

trong đó $y_{1i}(x), y_{2i}(x), \ldots, y_{ni}(x)$ là tọa độ của vecteur nghiệm Y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Định lý 3:

Nếu Y_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) là một hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất (1') thì:

$$Y = c_1Y_1 + c_2Y_2 + \ldots + c_nY_n,\ \forall\, c_1, c_2, \ldots, c_n \in R.$$

là nghiệm tổng quát của hệ đó.

Định lý 4:

Nghiệm tổng quát của hệ không thuần nhất (1) là:

$$Y = \sum_{i\ 1}^{n} c_iY_i + \overline{Y}\,.$$

trong đó Y_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) là một hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất tương ứng (1') và $\overline{Y}$ là một nghiệm riêng của hệ không thuần nhất (1).

b) Phương pháp biến thiên hằng số của Lagrange

Đối với hệ không thuần nhất (1) ta cũng có phương pháp biến thiên hằng số của Lagrange để tìm nghiệm tổng quát của hệ đó nếu biết một hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất tương ứng (1').

Cụ thể: ***nghiệm tổng quát của hệ (1) có dạng:***

$$Y = u_1(x)Y_1 + u_2(x)Y_2 + ... + u_n(x)Y_n.$$

trong đó Y_i (i = 1, 2, ..., n) là một hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất tương ứng (1') và $u_i(x)$ (i = 1, 2, ... , n) được xác định từ hệ

$$\sum_{i=1}^{n} u_i'(x)y_{ik} = f_k(x), \quad (k = 1, 2, ..., n) \qquad (3)$$

với y_{ik} (i = 1, 2, ... , n) là tọa độ của vecteur Y_k.

Thí dụ:

Tìm nghiệm tổng quát của hệ:

$$\frac{dy}{dx} = -y - 2z + 2e^{-x}$$
$$\frac{dz}{dx} = 3y + 4z + e^{-x}$$

giải hệ thuần nhất tương ứng bằng phương pháp khử ta có:

$$y = c_1e^x + 2c_2e^{2x}$$
$$z = -c_1e^x - 3c_2e^{2x}$$

Vậy ta tìm nghiệm tổng quát của hệ không thuần nhất dưới dạng:

$$y = u_1(x)e^x + 2u_2(x)e^{2x}$$
$$z = -u_1(x)e^x - 3u_2(x)e^{2x}$$

Theo hệ (3) $u_1(x)$, $u_2(x)$ được xác định từ hệ:

$$\begin{cases} u_1'(x)e^x + 2u_2'(x)e^{2x} = 2e^{-x} \\ -u_1'(x)e^x - 3u_2'(x)e^{2x} = e^{-x} \end{cases}$$

Giải hệ này ta được:

$$u_1' = 8e^{-2x}, \quad u_2' = -3e^{-3x}$$

do đó: $u_1(x) = -4e^{2x} + c_1$.

$$u_2(x) = e^{3x} + c_2.$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ đã cho là:

$$\begin{cases} y = c_1e^x + 2c_2e^{2x} - 2e^{-x} \\ z = -c_1e^x - 3c_2e^{2x} + e^{-x} \end{cases}$$

c) Hệ thuần nhất với hệ số hằng số. Phương pháp Euler

Xét hệ: $Y' = AY$ (1) với $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = \text{const}$, $i, j = 1, 2, ..., n$.

Tương tự như khi giải phương trình tuyến tính thuần nhất cấp cao, ta sẽ tìm nghiệm của hệ (1) dưới dạng các hàm mũ: $y_j = h_je^{\lambda x}$ ($j = 1, 2, ..., n$), khi đó:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} h_1e^{\lambda x} \\ h_2e^{\lambda x} \\ \cdots\cdots \\ h_ne^{\lambda x} \end{pmatrix} = e^{\lambda x}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdots \\ h_n \end{pmatrix}, \quad Y'(x) = \lambda e^{\lambda x}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

ký hiệu H là vecteur có các tọa độ $h_1, h_2, ..., h_n$ và thay $Y(x)$, $Y'(x)$ vào (1) ta có phương trình:

$$A\, e^{\lambda x} H = \lambda\, e^{\lambda x} H.$$

chia hai vế cho số vô hướng $e^{\lambda x} \neq 0$, ta được phương trình ma trận:

$$AH = \lambda H.$$

hay

$$(A - \lambda E)H = 0 \qquad (2)$$

trong đó E là ma trận đơn vị (cấp n).

Để tìm nghiệm khác không của (1), ta phải tìm các vecteur $H \neq 0$, từ phương trình (2).

Ta biết trong đại số, số λ gọi là trị riêng của ma trận A và vecteur H gọi là vecteur riêng ứng với trị riêng λ, λH là một vecteur đồng phương với H, cũng là một vecteur riêng.

Ta cũng biết điều kiện cần và đủ để phương trình (2) có nghiệm $H \neq 0$ là:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \qquad (3)$$

hay viết dưới dạng tọa độ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3')$$

Phương trình (3) hay (3') gọi là phương trình đặc trưng của hệ (1) và nghiệm λ của nó cũng gọi là số đặc trưng, vecteur H ứng với λ cũng gọi là vecteur đặc trưng của hệ đó. Phương trình (3) hay (3') là một phương trình đại số bậc n đối với λ, theo đại số nó có n nghiệm thực hoặc phức kể cả số bội.

1) Nếu các số đặc trưng $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ đều thực và khác nhau thì tương ứng với số λ_j. ($j = 1, 2, \dots, n$), từ hệ (2) ta sẽ tìm được bộ n số.

$$h_{1j}, h_{2j}, \dots, h_{nj} \ (j = 1, 2, \dots, n)$$

và ta có vecteur riêng H_j ($j = 1, 2, \dots, n$) có tọa độ là bộ n số đó.

Vậy hệ (1) có n nghiệm riêng ứng với số λ_j là:

$$y_{1j} = h_{1j}e^{\lambda_j x}, \quad y_{2j} = h_{2j}e^{\lambda_j x}, \dots, y_{nj} = h_{nj}e^{\lambda_j x} \qquad (4)$$

($j = 1, 2, \dots, n$) và ta được nghiệm tổng quát của hệ (1) là:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 y_{11} + c_2 y_{12} + \dots + c_n y_{1n} \\ y_2 &= c_1 y_{21} + c_2 y_{22} + \dots + c_n y_{2n} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= c_1 y_{n1} + c_2 y_{n2} + \dots + c_n y_{nn} \end{aligned}$$

$\forall c_1, c_2, \dots, c_n \subset R$, vì rõ ràng hệ (4) là một hệ nghiệm cơ bản của hệ (1).

Thí dụ:

Giải hệ:

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = -4x - y - 4z \\ z' = -y \end{cases} \qquad (a)$$

x, y, z là hàm của t.

Phương trình (2) có dạng:

$$\begin{cases} -\lambda h_1 \quad + \quad h_3 = 0 \\ -4\lambda h_1 - (1+\lambda)h_2 - 4h_3 = 0 \\ \quad -h_2 - \lambda h_3 = 0 \end{cases} \qquad (b)$$

Phương trình đạc trưng của hệ là:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -4\lambda & -(1+\lambda) & -4 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda^2)(\lambda + 1) = 0$$

Ta có 3 nghiệm của phương trình đặc trưng đều thực và khác nhau:

$\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -2$; $\lambda_3 = 2$. Với $\lambda_1 = 1$ hệ (3) có dạng:

$$h_{11} + h_{31} = 0$$

$$-h_{21} + h_{31} = 0$$

Giải hệ này, chẳng hạn lấy $h_{11} = 1$, $h_{21} = -1$, $h_{31} = -1$, ta có nghiệm riêng thứ nhất ứng với

$\lambda_1 = -1$; $x_1 = e^{-t}$; $y_1 = -e^{-t}$; $z_1 = -e^{-t}$ tương tự với $\lambda_2 = -2$, ta có nghiệm riêng thứ hai:

$$x_2 = e^{-2t}; y_2 = -4e^{-2t}; z_2 = -2e^{-2t}.$$

với $\lambda_3 = 2$, ta có nghiệm riêng thứ ba:

$$x_3 = e^{2t}, y_3 = -4e^{2t}, z_3 = 2e^{2t}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ (a) là:

$$x = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{2t},$$

$$y = -c_1e^{-t} - 4c_2e^{-2t} - 4c_3e^{2t},$$

$$z = -c_1e^{-t} - 2c_2e^{-2t} + 2c_3e^{2t}.$$

2) Nếu λ_j là một nghiệm phức đơn của phương trình đặc trưng (3') thì tương tự như khi giải phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp cao với hệ số hằng số, dùng các công thức Euler ta sẽ được các nghiệm thực của hệ (1) bằng cách tổ hợp các nghiệm phức liên hợp của hệ đó.

Thí dụ:

1) Giải hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = ay_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -ay_1 + by_3 \\ \dfrac{dy_3}{dx} = -by_2 \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

a, b = const. Ta có hệ phương trình để xác định các vecteur đặc trưng của hệ (a) là:

$$\begin{cases} -\lambda h_1 + ah_2 = 0 \\ -ah_1 - \lambda h_2 + bh_3 = 0 \\ -bh_2 - \lambda h_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{(b)}$$

và phương trình đặc trưng của hệ là:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & a & 0 \\ -a & -\lambda & b \\ 0 & -b & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + w^2) = 0 \quad (\text{với } w^2 = a^2 + b^2)$$

ta thấy phương trình đặc trưng có 3 nghiệm: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = iw$, $\lambda_3 = -iw$. Với $\lambda_1 = 0$, hệ (b) có dạng:

$$\begin{cases} ah_2 = 0 \\ -ah_1 + bh_3 = 0 \\ -bh_2 = 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \frac{h_1}{b} = \frac{h_2}{0} = \frac{h_3}{a}$$

Lấy $h_1 = b$, $h_2 = 0$, $h_3 = a$, ta có nghiệm riêng thứ nhất của hệ (a): $y_{11} = b$, $y_{21} = a$, $y_{31} = a$, $\lambda_2 = iw$, hệ (b) có dạng:

$$-iwh_1 + ah_2 = 0$$

$$-ah_1 - iwh_2 + bh_3 = 0$$

$$-bh_2 - iwh_3 = 0$$

hay

$$\frac{h_1}{a} = \frac{h_2}{iw} = \frac{h_3}{-b}$$

Lấy $h_1 = a$, $h_2 = iw$, $h_3 = -b$. Ta có nghiệm riêng thứ hai của hệ (a) là:

$$y_{12} = ae^{iwx},\ y_{22} = iwe^{iwx},\ y_{32} = -be^{iwx}$$

với $\lambda_3 = -iw$, tương tự ta có nghiệm riêng thứ 3 của hệ (a) là:

$$y_{13} = ae^{-iwx},\ y_{32} = -iwe^{-iwx},\ y_{32} = -be^{-iwx}$$

Tổ hợp các nghiệm phức trên của hệ ta có nghiệm tổng quát (thực) của hệ (a) là:

$$y_1 = c_1 b + c_2 a\cos wx + c_3 a \sin wx.$$

$$y_2 = -c_2 w \sin wx + c_3 \cos wx..$$

$$y_3 = c_1 a - c_2 b \cos wx + c_3 w \sin wx.$$

2) Giải hệ:

$$\frac{dy}{dx} = 2y - z,\quad \frac{dy}{dx} = y + 2z \qquad \text{(a)}$$

Phương trình đặc trưng của hệ là:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{hay } \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

Phương trình này có 2 nghiệm phức liên hợp $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$, $\lambda_1 = 2 + i$ ứng với nghiệm phức của hệ (a)

$$y = h_1 e^{(2+i)x}, \quad z = h_2 e^{(2+i)x}$$

trong đó h_1, h_2 là nghiệm của phương trình: $-ih_1 \quad h_2 = 0$ (theo (2)). Lấy $h_1 = 1$, $h_2 = -i$, ta có:

$$y = e^{(2+i)x} = e^{2x}(\cos x + i\sin x).$$

$$z = -ie^{(2+i)x} = e^{2x}(\sin x - i\cos x).$$

Tách phần thực và phần ảo của nghiệm này ta được một hệ nghiệm cơ bản của hệ (a) là:

$$y_1 = e^{2x}\cos x, \ z_1 = e^{2x}\sin x.$$

$$y_2 = e^{2x}\sin x, \ z_2 = -e^{2x}\cos x.$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ (a) là:

$$y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x).$$

$$z = e^{2x}(c_1\sin x - c_2\cos x).$$

3) Nếu λ_j là một nghiệm bội m của phương trình đặc trưng thì ứng với nó có một nghiệm riêng $y_1 \neq 0$ của hệ (1). Biết một nghiệm riêng ($\not\equiv 0$) của hệ (1) ta có thể dùng phương pháp sau đây để giải hệ đó (tương tự như đối với phương trình tuyến tính).

Ta có thể chứng minh:

Nếu $Y_1(x) \not\equiv 0$ là một nghiệm của hệ (1) thì nghiệm tổng quát của hệ có dạng:

$$Y = uY_1 + Z. \tag{2}$$

Trong đó $u = u(x)$ là một hàm vô hướng, $Z(x)$ là một hàm vecteur, chúng là nghiệm của hệ:

$$u' = (N, Az) / (N, Y_1) \qquad (3)$$

$$Z' + Y_1 u' = AZ \qquad (4)$$

với N là một vecteur cố định:

$$(N, Z) = 0 \qquad (5)$$

Trong thực tế thường chọn N là một vecteur của cơ sở không gian các nghiệm của hệ (1) để có điều kiện $(N, Y_1) \neq 0$.

Thực vậy, đạo hàm (2), thay vào (1), ta có:

$$Z' + u'Y_1 = AZ \qquad (4)$$

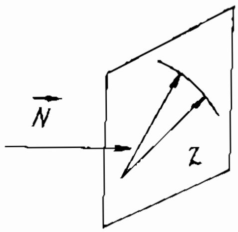
Từ (5) ta thấy điểm cuối của vecteur Z vẽ nên một mặt phẳng vuông góc với vecteur N trong không gian n chiều của các vecteur $Y.Z$ (H 193)

do đó $(N, Z') = 0$ và từ (4) suy ra:

$u' = (N, Y_1) = (N, AZ)$

(nhân vô hướng hai vế của (4) với $\vec{N}$)

Vậy ta có $u' = \dfrac{(N, AZ)}{(N.Y_1)}$ (5)



Theo phương pháp này, muốn có nghiệm (2) của hệ (1), ta phải giải hệ (3), (4) để tìm u, Z: thay u' bởi (3) vào (4) ta có hệ:

$$Z' + \frac{Y_1(N, AZ)}{(N.Y_1)} = AZ \qquad (6)$$

Hình 193

Hệ này với điều kiện (5) là hệ có $n - 1$ ẩn hàm, như vậy ta đã đưa hệ (1) có n ẩn hàm (các tọa độ của Y) về hệ (6) có $n - 1$ ẩn hàm.

Thí dụ: Giải hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x + 5y + 3z \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x + 7y + 4z \\ \dfrac{dz}{dt} = -2x + y + z \end{cases} \qquad (a)$$

Phương trình đặc trưng của hệ là:

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 5 & 3 \\ -8 & 7-\lambda & 4 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{hay} \quad \lambda(\lambda-1)^2 = 0.$$

vậy phương trình đặc trưng có một nghiệm kép $\lambda_1 = 1$ và một nghiệm đơn $\lambda_2 = 0$.

Nghiệm kép $\lambda_1 = 1$ ứng với vecteur riêng:

$$h_1 = 1,\ h_2 = 2,\ h_3 = 1$$

và ta có nghiệm riêng tương ứng:

$$x_1 = e^t,\ y_1 = 2e^t,\ z_1 = e^t$$

Với nghiệm đơn $\lambda_2 = 0$, ta có

$$h_1 = 1,\ h_2 = 0,\ h_3 = 2$$

và ta có nghiệm:

$$x_2 = 1,\ y_2 = 0,\ z_2 = 2$$

Bây giờ ta xét nghiệm kép, để tiến hành phương pháp trên ta chon N là vecteur có thành phần 0,0,1 và lấy Z là vecteur có thành phần α, β, 0 thì $(N, Z) = 0$, khi đó theo (2) ta đặt:

$$\begin{aligned} x &= ue^t + \alpha \\ y &= 2ue^t + \beta \\ z &= -ue^t \end{aligned} \qquad (b)$$

Thay (b) vào hệ (a) và rút gọn ta có:

$$\begin{aligned} \alpha' &= -8\alpha + 6\beta \\ \beta' &= 12\alpha + 9\beta \\ u' &= (2\alpha - \beta)e^{-t} \end{aligned} \qquad \text{(c)}$$

Hệ gồm hai phương trình đầu của (c) cũng có các số đặc trưng là $\lambda = 0$ và $\lambda = 1$ như hệ (a). Giải hệ này ta có:

$$\begin{aligned} \alpha &= 3c_1 + 2c_2e^t \\ \beta &= 4c_1 + 3c_2e^t \end{aligned}$$

Do đó phương trình cuối của hệ (c) viết được:

$$u' = (2c_1 + c_2e^t)e^{-t} = 2c_1e^{-t} + c_2 \text{ và } u = -2c_1e^{-t} + c_2t + c_3.$$

Thay α, β và u vừa tìm được vào (b), ta có nghiệm tổng quát của hệ (a) là:

$$x = c_1 + (c_2t + 2c_2 + c_3)e^t$$

$$y = (2c_2t + 2c_3 + 3c_2)e^t$$

$$z = 2c_1 - (c_2t + c_3)e^t$$

Chú ý:

1) Nếu biết hai nghiệm riêng Y_1, Y_2 của hệ thuần nhất $Y' = AY$ (1) thì tương tự ta giải hệ đó như sau:

Giả sử không tồn tại hệ thức $Y_1 + \mu Y_2 = 0$ với μ là một hàm đã cho của x ($\neq 0$)

Đặt: $$Y = u_1Y_1 + u_2Y_2 + Z \qquad (2)$$

với u_1, u_2 là các hàm vô hướng chưa biết, Z là một hàm vecteur chưa biết của x.

Thay (2) vào (1) ta có:

$$u_1'Y_1 + u_2'Y_2 + Z' = AZ \qquad (3)$$

Buộc Z thỏa mãn hai điều kiện:

$$(N_1, Z) = 0, \ (N_2, Z) = 0 \qquad (4)$$

N_1, N_2 là các vecteur cố định nào đó. Do đó:

$$\begin{cases} u_1'(N_1.Y_1) + u_2'(N_1.Y_2) = (N_1.AZ) \\ u_1'(N_2.Y_1) + u_2'(N_2.Y_2) = (N_2.AZ) \end{cases} \qquad (5)$$

(5) là một hệ phương trình tuyến tính đối với u_1', u_2' biểu thị tuyến tính qua Z, thay chúng vào (3) và theo điều kiện (4), ta có hệ $n - 2$ ẩn đối với Z, giải hệ ta có Z và cuối cùng ta có Y.

Rõ ràng hệ (5) có nghiệm duy nhất khi

$$\begin{vmatrix} (N_1.Y_1) & (N_1.Y_2) \\ (N_2.Y_1) & (N_2.Y_2) \end{vmatrix} \neq 0$$

Nếu định thức này bằng không thì tồn tại một hàm $\mu(x)$ sao cho:

$$(N_1, Y_1 + \mu Y_2) = 0, \ (N_2, Y_1 + \mu Y_2) = 0 \qquad (6)$$

Nếu $Y_1 + \mu Y_2 \neq 0$, ta luôn luôn có thể chọn N_1, N_2 để điều (6) không thỏa mãn.

Thí dụ:

Giải hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x + 5y + 3z \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x + 7y + 4z \\ \dfrac{dz}{dt} = -2x + y + z \end{cases} \qquad (a)$$

(Đã xét ở thí dụ trên). Ta biết hệ này có hai nghiệm riêng:

$$Y_1: x_1 = e^t \qquad Y_2: x_2 = 1$$
$$y_1 = 2e^t \qquad y_2 = 0$$
$$z_1 = -e^t \qquad z_2 = 2$$

ta lấy vecteur N_1 có tọa độ 1, 0, 0. N_2 có tọa độ 0, 1, 0. và Z là vecteur có tọa độ $(0, 0, \alpha(x))$ thì $(N_1, Z) = 0$, $(N_2, Z) = 0$. Do đó theo (2) ta đặt: $x = u_1e^t + u_2$, $y = 2u_1e^t$, $z = -u_1e^t + 2u_2 + \alpha$, thay vào (a) rút gọn:

$$u_1'e^t + u_2' = 3\alpha,\ \ u_1'e^t = 2\alpha,\ \ u_1'e^t + 2u_2' + \alpha' = \alpha$$

do đó: $$u_1' = 2\alpha e^{-t},\ \ u_2' = \alpha\ ,\ \ \alpha' = \alpha.$$

Từ phương trình thứ ba: $= c_1e^t$. Từ phương trình thứ hai: $u_2 = c_1e^t + c_2$. Từ phương trình thứ nhất: $u_1' = 2c_1$, hay $u_1 = 2c_1t + c_3$. Do đó nghiệm tổng quát của hệ (a) là:

$$x = c_2 + (2c_1t + c_1 + c_3)e^t$$

$$y = 2(2c_1t + c_3)e^t$$

$$z = 2c_2 + (-2c_1t + 3c_1 - c_3)e^t.$$

Rõ ràng nghiệm này trùng với nghiệm đã biết (với sự thay đổi hằng số tùy ý thích hợp).

2) Khi biết λ_j là một nghiệm bội m của phương trình đặc trưng thì ta cũng có thể dùng phương pháp sau đây để giải hệ thuần nhất (1). Ta tìm nghiệm của hệ (1) dưới dạng:

$$y_1 = P_1(x)e^{\lambda_j x},\ \ y_2 = P_2(x)e^{\lambda_j x}, \ldots, y_n = P_n(x)e^{\lambda_j x}.$$

Trong đó $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$ là các đa thức của x bậc không quá
$m - 1$.

Để xác định các hệ số của các đa thức trên, ta thay các nghiệm trên vào hệ (1), ta được những đồng nhất thức, từ đó rút ra một hệ phương trình để xác định các hệ số đó.

Thí dụ: Giải hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x + 2y + 5z \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x - y - 6z \\ \dfrac{dz}{dt} = -8x + 3y + 9z \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

Ta có phương trình đặc trưng của hệ:

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 5 \\ 6 & -1-\lambda & -6 \\ -8 & 3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{hay } \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

Phương trình đặc trưng có các nghiệm $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, với nghiệm $\lambda_1 = 2$, ta có nghiệm riêng của hệ (a) là:

$$x_1 = e^{2t}, \; y_1 = -2e^{2t}, \; z_1 = 2e^{2t} \tag{b}$$

($h_1 = 1$, $h_2 = -2$, $h_3 = 2$) với nghiệm kép $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, theo trên ta tìm nghiệm riêng của hệ (a) dưới dạng:

$$x = (A_1t + A_2)e^t, \; y = (B_1t + B_2)e^t, \; z = (C_1t + C_2)e^t \tag{c}$$

Thay (c) vào hệ (a) và rút gọn ta có:

$$A_1t + A_1 + A_2 = (-4A_1 + 2B_1 + 5C_1)t - 4A_2 + 2B_2 + 5C_2$$

$$B_1t + B_1 + B_2 = (6A_1 - B_1 - 6C_1)t + 6A_2 - B_2 - 6C_2$$

$$C_1t + C_1 + C_2 = (-8A_1 + 3B_1 + 9C_1)t \quad 8A_2 + 3B_2 + 9C_2.$$

Đồng nhất các hệ số của t ở hai vế ta được:

$$- 5A_1 + 2B_1 + 5C_1 = 0$$

$$- 6A_1 - 2B_1 - 6C_1 = 0$$

$$- 8A_1 + 3B_1 + 8C_1 = 0$$

$$-5A_2 + 2B_2 + 5C_2 = A_1$$

$$6A_2 - 2B_2 - 6C_2 = B_1$$

$$- 8A_2 + 3B_2 + 8C_2 = C_1$$

Do đó $A_1 = C_1$, $B_1 = 0$, $A_2 = C_1 + C_2$, $B_2 = 3C_1$ trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý. Vậy nghiệm (c) có dạng:

$$x = (c_1t + c_1 + c_2)e^t, \; y = 3c_1e^t, \; z = (c_1t + c_2)e^t.$$

và các nghiệm riêng độc lập tuyến tính của hệ (a) ứng với số đặc trưng $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, có thể lấy là:

$$x_2 = (t+1)e^t, \; y_2 = 3e^t, \; z_2 = te^t$$

$$x_3 = e^t, \; y_3 = 0, \; z_3 = e^t \qquad \text{(d)}$$

Vậy theo (b), (d) nghiệm tổng quát của hệ (a) là:

$$\begin{cases} x = c_1e^{2t} + (c_2t + c_2 + c_3)e^t \\ y = -2c_1e^{2t} + 3c_2e^t \\ z = 2c_1e^{2t} + (c_2t + c_3)e^t \end{cases}$$

*§9. TOÁN TỬ LAPLACE

Trong phần này ta sẽ đưa ra một loại biến đổi gọi là biến đổi hay toán tử Laplace, nó cho phép giải phương trình vi phân hay hệ phương trình vi phân rất hiệu lực, ngoài việc giải phương trình vi phân biến đổi Laplace còn có nhiều ứng dụng trong các ngành khoa học.

9.1. Định nghĩa

Cho f(t) là một hàm của biến thực t, xác định với $\forall t \in R$ và f(t) = 0 với $\forall t < 0$. Ta gọi biến đổi hay toán tử Laplace của hàm f(t) là hàm:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt \qquad \textbf{(1)}$$

với p là một biến thực hay phức. Trong phần này ta chỉ giới hạn áp dụng biến đổi Laplace vào việc giải phương trình tuyến tính với hệ số hằng số nên ta chỉ xét $p \in R$ và $p > 0$ và giả sử $f(t)$ thỏa mãn ba điều kiện:

1) f(t) là một hàm liên tục từng phần khi $t \geq 0$ ($\forall [a, b]$, $a \geq 0$, $b > 0$, $\exists$ một cách chia [a, b] thành một số hữu hạn phần trên mỗi phần f(t) là liên tục).

2) $\exists M > 0$, $s_0 \geq 0$, $\forall t > 0$: $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$ s_0 gọi là chỉ số tăng của $f(t)$.

3) $f(t) = 0$ khi $t < 0$. Các điều kiện 1), 2), 3) của $f(t)$ đảm bảo cho tích phân (1) tồn tại.

$F(p)$ gọi là ảnh của $f(t)$ và ngược lại $f(t)$ gọi là gốc của $F(p)$ qua phép biến đổi Laplace (1). Ký hiệu: $L[f(t)] = F(p)$ hay $f(t) \doteq F(p)$.

Thí dụ:

1) $$L[1] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \left.\frac{-e^{-pt}}{p}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

2) $$L[t^\alpha] = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-pt}dt = \frac{1}{p^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty} z^\alpha e^{-z}dz = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}} \quad (pt = z)$$

(Hàm Гamma §3, chương 10)

Đặc biệt $\alpha = n \in N$. $\Gamma(n+1) = n!$, $L[t^n] = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$

3) $$L[e^{at}] = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t}dt = \left.\frac{e^{(a-p)t}}{a-p}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-a} \quad (a < p)$$

4) $$L[e^{-at}] = \frac{1}{p+a}$$

9.2. Bảng gốc và ảnh. Theo công thức (1) ta có thể tìm ảnh của các hàm sơ cấp là các hàm gốc sau đây và ta có bảng (trong các thí dụ trên ta đã tìm ảnh của vài hàm trong bảng)

	Gốc	Ảnh
1^0	1	$\dfrac{1}{p}$
2^0	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ $(n \in N)$
3^0	t^α	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha-1}}$ $(\alpha > -1)$
4^0	$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$

5^0	e^{-at}	$\dfrac{1}{(p+a)}$
6^0	te^{-at}	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
7^0	$t^n e^{-at}$	$\dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$ $(n \in N)$
8^0	$\cos \omega t$	$\dfrac{p}{(p^2+w^2)}$
9^0	$\sin \omega t$	$\dfrac{w}{(p^2+w^2)}$
10^0	$e^{i\omega t}$	$\dfrac{1}{(p-iw)}$ $(i^2=-1)$
11^0	$e^{at}\cos \omega t$	$\dfrac{(p+a)}{(p+a)^2+w^2}$
12^0	$e^{at}\sin \omega t$	$\dfrac{w}{(p+a)^2+w^2}$
13^0	$f(at)$	$\dfrac{1}{a}F(\dfrac{p}{a})$ $(a>0)$
14^0	$f(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$ $(a>0)$
15^0	$e^{-at}f(t)$	$F(p+a)$ $(a>0)$
16^0	$\operatorname{sh}at$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$
17^0	$\operatorname{ch}at$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$
18^0	$t.\sin at$	$\dfrac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$
19^0	$t.\cos at$	$\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
20^0	$t.\operatorname{sh}at$	$\dfrac{2pa}{(p^2-a^2)^2}$
21^0	$t.\operatorname{ch}at$	$\dfrac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$

9.3. Các tính chất

Từ định nghĩa ta có thể chứng minh các tính chất của biến đổi Laplace: (với $f(t) \doteq F(p)$, $g(t) \doteq G(p)$)

1) $c_1 f(t) + c_2 g(t) \doteq c_1 F(p) + c_2 G(p)$, $c_1, c_2 = \text{const}$.

2) $f'(t) \doteq pF(p) - f(0)$.

3) $f''(t) \doteq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$.

4) $f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

5) $\int_0^t f(r)dr \doteq \frac{F(p)}{p}$

6) $-tf(t) \doteq F'(p)$

7) $(-1)^n f(t) \doteq F^{(n)}(p)$.

8) $\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^{+\infty} F(\xi)d\xi$

9) $f * g \doteq F(p).\ G(p)$.

với $f * g \doteq \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ ***gọi là tích phân chập của f và g.***

10) $pF(p)G(p) \doteq f' * g + f(0)g(t) = g' * f + g(0)f(t)$ ***(công thức Duhamel).***

Ta sẽ chứng minh vài công thức trong bảng này (các công thức khác chứng minh tương tự). Chẳng hạn xét 2).

Theo định nghĩa:

$$f'(t) \doteq \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt$$

(tích phân từng phần). Do đó: $f'(t) \doteq pF(p) - f(0)$. $p > 0$ vì theo giả thiết $|f(t)| \le Me^{s_0 t}$.

$|f(t)e^{-pt}| \le M e^{(s_0-p)t} \to 0$ khi $t \to +\infty$ nếu $p > s_0$.

5) Đặt $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$, thì $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t) = f(t)$. Giả sử $\varphi(t) \doteq \Phi(p)$, theo 2^0.

$\varphi'(t) = p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p)$

Vậy $F(p) = p\Phi(p)$ hay $\Phi(p) = \dfrac{F(p)}{p}$.

Chú ý: Từ 2), 3), 4), 5) ta thấy đạo hàm và tích phân gốc chuyển thành các phép tính đại số đối với ảnh tương ứng. Do đó phép biến đổi Laplace là một công cụ giải phương trình vi phân có hiệu lực.

9.4. Áp dụng giải phương trình vi phân

Ta sẽ áp dụng phép biến đổi Laplace (phép tính toán tử) chủ yếu để giải các bài toán Cauchy đối với phương trình và hệ phương trình vi phân với hệ số hằng số qua các thí dụ:

1) Giải phương trình: $y'' + 4y = 2$ (1)

Thỏa mãn điều kiện:

$$y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 0 \qquad (2)$$

Giả sử $y(x) \doteq Y(p)$ theo tính chất 3^0 và điều kiện (2): $y''(x) \doteq p^2Y(p)$. Theo 1^0 bảng: $2 \doteq \dfrac{2}{p}$. Do đó (1), (2) có ảnh là phương trình toán tử:

$$p^2Y(p) + 4Y(p) = \frac{2}{p}$$

hay

$$Y(p) = \frac{2}{p(p^2+4)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{(p^2+4)}\right)$$

(phân tích số hữu tỷ)

Bây giờ áp dụng các phép biến đổi ngược, theo 1^0 và 8^0 bảng: ta sẽ có nghiệm của bài toán Cauchy (1), (2).

$$y(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

2) Giải bài toán Cauchy

$$y'' - y = 4\sin t + 5\cos 2t \qquad (1)$$

$$y\big|_{t=0} = -1, \quad y'\big|_{t=0} = -2 \qquad (2)$$

Giả sử $y(t) \doteq Y(p)$ thì theo tính chất 3^0 và điều kiện (2) ta có:

$$Y''(t) = p^2Y + p + 2.$$

Theo 8^0, 9^0 bảng :

$$4\sin t = \frac{4}{p^2+1}, \quad \cos t = \frac{5p}{p^2+4}$$

Vậy ta có phương trình ảnh của (1) (2):

$$p^2Y + p + 2 - Y = \frac{4}{p^2+1} + \frac{5p}{p^2+1}$$

do đó:

$$Y = \frac{4}{(p^2+1)(p^2-1)} + \frac{5p}{(p^2-1)(p^2+4)} - \frac{p+2}{p^2-1}$$

$$= \frac{2}{p^2-1} - \frac{2}{p^2+1} + \frac{p}{p^2-1} - \frac{p}{p^2+4} - \frac{p}{p^2-1} - \frac{2}{p^2-1} = \frac{-2}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+4}$$

Lại theo 8^0, 9^0 bảng ta có nghiệm của bài toán Cauchy (1) (2):

$$y(t) = -2\sin t - \cos 2t.$$

3) Giải bài toán Cauchy

$$y'' + y = e^t \qquad (1)$$

$$y\big|_{t=1} = 1, \quad y'\big|_{t=1} = 0 \qquad (2)$$

Các điều kiện ban đầu ở đây không phải tại $t = 0$ do đó phải biến đổi để đưa về trường hợp trên.

Đặt: $t = \tau + 1,\ t = 1 \Leftrightarrow \tau = 0$

$$y(t) = y(\tau + t) = z(\tau),\ y'(t) = z'(\tau)$$

$y''(t) = z''(\tau)$ và bài toán (1) (2) được đưa về bài toán:

$$z''(\tau) + z(\tau) = e^{\tau+1} \qquad (1')$$

$$z\big|_{\tau=0} = 1,\quad z'\big|_{\tau=0} = 0 \qquad (2')$$

Giả sử $Z(p) \doteq z(\tau)$, theo tích chất 3 và điều kiện (2'): $Z''(\tau) = p^2Z \equiv p$. Mặt khác theo 5^0 bảng: $e^{\tau+1} = e.e^{\tau} = \dfrac{e}{p-1}$

Vậy phương trình ảnh của (1') (2') là:

$$p^2Z - p + Z = \frac{e}{p-1}$$

hay

$$Z(p) = \frac{e}{(p-1)(p^2+1)} + \frac{p}{(p^2+1)} = \frac{e}{2(p-1)} - \frac{e(p+1)}{2(p^2+1)} + \frac{p}{(p^2+1)}$$

$$Z(p) = \frac{e}{2(p-1)} + (1-\frac{e}{2})\frac{p}{p^2+1} - \frac{e}{2(p^2+1)}$$

Theo 5^0, 8^0, 9^0 bảng ta có:

$$z(\tau) = \frac{e}{2}e^{\tau} + (1-\frac{e}{2})\cos\tau - \frac{e}{2}\sin\tau$$

trở lại biến t, ta có nghiệm của bài toán Cauchy (1), (2):

$$y(t) = \frac{e^{t-1}}{2} + (1-\frac{e}{2})\cos(t-1) - \frac{e}{2}\sin(t-1)$$

4) Giải bài toán Cauchy với điều kiện ban đầu triệt tiêu:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(t) \qquad (1)$$

$$y\big|_{t=0} = 0, \quad y'\big|_{t=0} = 0, \dots, y^{(n-1)}\big|_{t=0} = 0 \qquad (2)$$

$a_i = \text{const}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

Ta sẽ chứng minh nếu biết một nghiệm $y_1(t)$ của bài toán:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 1 \qquad (1')$$

với điều kiện (2) thì nghiệm của bài toán (1) (2) là:

$$y(t) = \int_0^\tau f(t-\tau) y_1'(\tau) d\tau \qquad (3)$$

Thực vậy, ảnh của bài toán (1') (2) là:

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) Y_1(p) = \frac{1}{p} \qquad (4)$$

$Y_1(p) \doteq y_1(t)$ và ảnh của bài toán (1) (2) là:

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) Y(p) = F(p) \qquad (5)$$

với $Y(p) \doteq y(t)$, $F(p) \doteq f(t)$.

Từ (4) (5) suy ra: $\dfrac{1}{pY_1(p)} = \dfrac{F(p)}{Y(p)}$ hay $Y(p) = pY_1(p).F(p)$. Theo công thức Duhamel. (tính chất 10^0):

$$Y(p) \doteq y_1(0) f(t) + y_1'(t) * f.$$

Theo (2): $y_1(0) = 0$ nên $Y(p) \doteq y_1'(t) * f$. Theo định nghĩa tích chập ta có nghiệm của bài toán (1) (2):

$$y(t) = \int_0^t f(t-\tau) y_1'(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) y_1'(t-\tau) d\tau \qquad (6)$$

Chẳng hạn giải bài toán Cauchy:

$$y'' - y = \frac{1}{1+e^t}, \quad y\big|_{t=0} = 0, \quad y'\big|_{t=0} = 0$$

Đầu tiên ta tìm nghiệm y_1 của bài toán Cauchy:

$$y'' - y = 1$$

$$y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 0$$

Ta có: $$p^2Y_1 - Y_1 = \frac{1}{p}$$

$$Y_1 = \frac{1}{p(p^2-1)} = \frac{p}{p^2-1} - \frac{1}{p} \text{ và } y_1(t) = \mathrm{ch}t - 1$$

Vậy theo công thức (6), ta có nghiệm của bài toán đã cho là:

$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{1+e^\tau} sh(t-\tau)d\tau = \int_0^t \frac{e^{t-\tau} - e^{-t+\tau}}{2(1+e^\tau)} d\tau$$

$$= \frac{e^t}{2}\int_0^t \frac{e^{-\tau}d\tau}{1+e^\tau} - \frac{e^{-t}}{2}\int_0^t \frac{d(e^\tau+1)}{e^{-\tau}+1}$$

$$= -\frac{e^{-t}}{2}\ln\frac{1+e^t}{2} - \frac{e^{t}}{2}\int_0^t \frac{e^{-\tau}de^{-\tau}}{e^{-\tau}+1}$$

$$= -\frac{e^{-t}}{2}\ln\frac{1+e^t}{2} - \frac{e^t}{2}(e^{-t}-1) + \frac{e^t}{2}\int_0^t \frac{d(e^{-\tau}+1)}{e^{-\tau}+1}$$

$$= -\frac{e^{-t}}{2}\ln\frac{1+e^t}{2} - \frac{1}{2} + \frac{e^t}{2} + \frac{e^t}{2}\ln\frac{e^{-t}+1}{2}$$

$$= sht\ln\frac{1+e^t}{2} + \frac{1}{2}(-te^t + e^t - 1)$$

5) Giải hệ:

$$\begin{cases} y' + y - z = e^t \\ z' + 3y - 2z = 2e^t \end{cases} \qquad (1)$$

$$y\big|_{t=0} = 1, \quad z\big|_{t=0} = 1 \qquad (2)$$

Giả sử $y \doteqdot Y(p)$, $z \doteqdot Z(p)$ thì: $y' \doteqdot pY - 1$, $z' \doteqdot pZ - 1$ và ta có hệ phương trình ảnh của (1) (2) là:

$$\begin{cases} pY - 1 + Y - Z = \dfrac{1}{p-1} \\ pY - 1 + 3Y - 2Z = \dfrac{2}{p-1} \end{cases}$$

Giải hệ này ta có: $Y(p) = \dfrac{1}{p-1}$, $Z(p) = \dfrac{1}{p-1}$. Do đó nghiệm của bài toán (1) (2) là:

$$y(t) = e^t,\ z(t) = e^t.$$

Chú ý: Có thể dùng toán tử Laplace để giải một số phương trình vi phân tuyến tính với hệ số biến thiên, một số phương trình vi phân đạo hàm riêng, phương trình tích phân hoặc tính các tích phân, ..., chẳng hạn, tính tích phân:

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos xt}{t^2} dt .$$

Ta có:

$$L[I(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-px}\left(\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos xt}{t^2}\right)dx$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-px}(1 - \cos xt)dx\right)\frac{dt}{t^2}$$

$$= \int_0^{+\infty} L[1 - \cos xt]\frac{dt}{t^2} = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + t^2}\right)\frac{dt}{t^2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{p(p^2 + t^2)} = \frac{1}{p^2} arctg\frac{t}{p} = \frac{\pi}{2p^2}$$

Do đó:

$$I(x) = \frac{\pi}{2}x .$$

BÀI TẬP

1. Chứng tỏ rằng các hàm số hoặc các hệ thức sau đây là nghiệm hay tích phân của các phương trình vi phân tương ứng:

1) $y = \dfrac{c^2 - x^2}{2x}$; $(x + y)dx + xdy = 0$

2) $y = 3\sin x - 4\cos x$; $y'' + y = 0$

3) $x^2 - xy + y^2 = c^2$; $(x - 2y)y' = 2x - y$

4) $y = \ln(xy)$, $(xy - x)y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0$

2. Giải các phương trình biến số phân ly:

1) $\mathrm{tg}x\sin^2 y\,dx + \cos^2 x\,\mathrm{cotg}y\,dy = 0$

2) $xy' - y = y^3$

3) $y - xy' = a(1 + x^2y')$

4) $(1 + e^x)yy' = e^x$, $y\big|_{x=0} = 1$

5) $y'\sin x = y\ln y$, $y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$

6) $y' = (8x + 2y + 1)^2$

7) $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0$

8) $y' = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - x\right)\dfrac{1}{y}$

9) $(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0$

10) $(1 + y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1 + y)dy = 0$

3. Chứng minh rằng các phương trình sau đây không có nghiệm bất thường:

1) $y' = (x^2 - x)(1 + y^3)$

2) $y' = \dfrac{\sin y}{1 + x^2}$

3) $y' = (x + y)\dfrac{1}{x}$

4) $(y + y^2 - x^2(y + y^2))dx + (x^3y - 8y \quad x^3 + 8)\, dy = 0$

4.

1) Tìm một đường cong có đoạn tiếp tuyến gồm giữa tiếp điểm và trục hoành bằng khoảng cách từ tiếp điểm đến gốc tọa độ.

2) Theo định luật Newton: tốc độ giảm nhiệt của một vật tỷ lệ với độ chênh lệch nhiệt độ của vật và không khí.

Tìm quy luật giảm nhiệt của vật biết rằng sau 20 phút nhiệt độ của vật giảm từ 100^0C xuống 60^0C và nhiệt độ của không khí là 20^0. Sau bao lâu thì nhiệt độ của vật giảm xuống 30^0C ?

5. Giải các phương trình đẳng cấp cấp một:

1) $(x - y)ydx - x^2dy = 0$

2) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$

3) $(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0$

4) $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0, \quad y\big|_{x=2} = 1$

5) $(2x - y + 4)dy + (x - 2y + 5)dx = 0$

6) $(x - y)dx + (2y - x + 1)dy = 0$

7) $\left(\dfrac{2}{x^2} - y^2\right)dx + dy = 0$

8) $(y + y\sqrt{x^2y^4 - 1})dx + 2xydy = 0$

***6**.

1) Tìm một đường cong có hình chiếu của đoạn tiếp tuyến gồm giữa tiếp điểm và trục hoành trên trục hoành (gọi là tiếp ảnh) bằng trung bình cộng các tọa độ của tiếp điểm.

2) Tìm dạng của một gương biết rằng mọi chùm tia tới song song chiếu vào gương thì các tia phản chiếu đều hội tụ tại một điểm.

7. Giải các phương trình tuyến tính cấp một và phương trình Bernoulli:

1) $y' - y\sin x = \sin x \cos x$

2) $y' + ay = e^{mx}$

3) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$

4) $y' + \text{tg}y = \dfrac{x}{\cos y}$

5) $(1 + y^2)dx = (\sqrt{1 + y^2}\sin y - xy)dy$

6) $y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{2}{x^3}$, $y\big|_{x=1} = 0$

7) $y' - y\,\text{tg}x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y\big|_{x=0} = 0$

8) $2xyy' - y^2 + x = 0$

9) $3x\,dy = y(1 + x\sin x - 3y^3 \sin x)dx$

10) $xy' + y = y^2 \ln x$, $y\big|_{x=1} = 1$.

11) $y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)\,y^{\frac{2}{3}}$, $y\big|_{x=0} = 0$

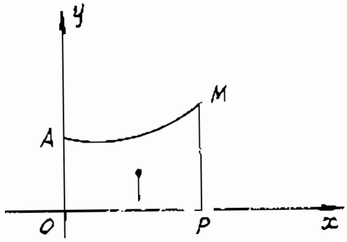
12) $y' = \dfrac{2x}{x^2 \cos y + a\sin 2y}$

***8.**

1) Tìm một đường cong biết rằng diện tích tam giác giới hạn bởi trục Ox, tiếp tuyến và bán kính vecteur của tiếp điểm bằng một hằng số.

2) Tìm cung $\overset{\frown}{AM}$, biết rằng hoàng độ của trọng tâm của hình OPMA (H 19.1) bằng $\dfrac{3}{4}$ hoành độ của điểm M.

3) Tìm một đường cong, biết rằng hình chiếu của doạn pháp tuyến gồm giữa tiếp điểm và trục hoành (gọi là pháp ảnh) tại mỗi diểm của dường bằng trung bình cộng các bình phương các tọa dộ tiếp điểm.



Hình 194

9. Giải các phương trình vi phân toàn phần hoặc các phương trình đưa về phương trình vi phân toàn phần:

1) $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$

2) $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$

3) $(x + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0$, $y\big|_{x=0} = 2$

4) $xdx + ydy + \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$

5) $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$

6) $\dfrac{(x + 2y)dx + ydy}{(x + y)^2} = 0$, $y\big|_{x=1} = 0$

7) $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$

8) $\dfrac{x}{y}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0$

9) $(xy^2 + y)dx - xdy = 0$

10) $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0$

10.

1) Tìm họ quỹ đạo trực giao của các họ đường cong:

a) $y = ax^2$

b) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$; $a, b = \text{const}$

c) $r = 2a\sin\varphi$

d) $(x^2 + y^2)^2 - a^2xy = 0$

2) Tìm họ quỹ đạo góc $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ của các họ:

a) Họ tất cả các nửa đường thẳng qua gốc tọa độ.

b) Họ đường xoắn ốc logarithme: $r = ae^{\varphi}$.

***11.** Giải các phương trình Clairaut và Lagrange

1) $y = xy' + y'$.

2) $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$

3) $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{y'^2}$

4) $y = \dfrac{1}{2}x(y' + \dfrac{4}{y'})$

5) $y = (1 + y')x + y'^2$.

6) $y = -\dfrac{1}{2}y'(2x + y')$

***12.** Giải các phương trình các loại khác nhau:

1) $x\ln\dfrac{x}{y}dy - ydx = 0$

2) $xy' + y = xy^2\ln x$

3) $y = xy' + y'\ln y'$.

4) $y' = \dfrac{3x^2}{x^2 + y + 1}$

5) $y' = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$

6) $2yp\frac{dp}{dy} = 3p^2 + 4y^2$

7) $y'\cot gx + y = 2,\ y\big|_{x=0} = 2$

*8) $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$

13. Giải các phương trình cấp cao có thể hạ cấp:

1) $y'' = \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x+1)^3}$

2) $y'' = e^x + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$

3) $x - \sin y'' + 2y'' = 0$

4) $x = e^{-y''} + y''$

5) $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$

6) $xy'' = \sqrt{1 + y'^2}$; $y\big|_{x=1} = 0$, $y\big|_{x=e^2} = 1$

7) $y''(1 + \ln x) + \frac{1}{x}y' = 2 + \ln x$, $y\big|_{x=1} = \frac{1}{2}$, $y'\big|_{x=0} = 1$

8) $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$, $y\big|_{x=0} = 1$, $y'\big|_{x=0} = 0$

9) $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0$

10) $yy'' = y'^2 + y'\sqrt{y^2 + y'^2}$

11) $y'''^2 = 4y''$

***14.**

1) Tìm các đường cong có bán kính cong (khúc bán kính) không đổi.

2) Tìm các đường cong có hình chiếu của bán kính cong trên trục Oy là không đổi.

3) Tìm quy luật chuyển động của một vật khối lượng m rơi trong không khí, biết rằng sức cản của không khí tỷ lệ với bình phương tốc độ và tốc độ ban đầu của vật bằng không.

15. Lập phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp hai biết nghiệm cơ bản:

1) $y_1 = x^2, y_2 = x^3$

2) $y_1 = x, y_2 = x\ln x$

3) $y_1 = x, y_2 = \sqrt{1 - x^2}$

4) $y_1 = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}, \quad y_2 = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

16. Giải các phương trình tuyến tính thuần nhất:

1) $(\sin x - \cos x)y'' - 2\sin x.y' + (\cos x + \sin x)y = 0$ biết $y_1 = e^x$

2) $(1 - x^2)y'' - xy' + \dfrac{1}{4}y = 0$ biết $y_1 = \sqrt{1+x}$

3) $(x - 1)y'' - (x + 1)y' + 2y = 0$ biết nghiệm riêng có dạng đa thức.

*4) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$ (phương trình Legendre, $n \in N$) biết nghiệm riêng:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n[(x^2 - 1)^n]}{dx^n} \quad \text{(đa thức Legendre)}$$

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình khi $n = 1$, $n = 2$

*5) $x\,y'' + (1 - x)y' + ny = 0$ (phương trình Laguerre, $n \in N$) biết nghiệm riêng:

$$L_n(x) = e^x\frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n} \quad \text{(đa thức Laguerre)}$$

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình khi: $n = 1$

17. Giải các phương trình tuyến tính không thuần nhất:

1) $x^2y'' + xy' - y = x^2$ biết $y_1 = x$: nghiệm riêng của phương trình thuần nhất.

2) $y''' + y' = \sec x$ biết ba nghiệm riêng $y_1 = 1$, $y_2 = \sin x$, $y_3 = \cos x$ của phương trình thuần nhất.

3) $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$ biết một nghiệm $y_1 = e^{x\sqrt{2}}$ của phương trình thuần nhất:

4) $y'' \quad y' = \dfrac{2 - x}{x^3} e^x$

5) $y''' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

18. Giải các phương trình tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số:

1) $y'' - 6y' + 8y = 0$

2) $y'' - 2y' = 0$

3) $y'' - y' + y = 0$

4) $y''' - y = 0$

5) $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$

6) $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0$

7) $y^{(4)} - y = 0$

8) $y^{(4)} + y = 0$

19. Giải các phương trình tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng số:

1) $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$

2) $y'' - 2y' - 3y = -4e^x + 3$

3) $y'' - 3y' + 2y = 3e^{x} + 2x^{2}$

4) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 3e^{-2x}$

5) $y^{(4)} - y = 4e^{x}$

6) $y'' + y = 6\sin 2x$

7) $y'' + y = \cos x + \cos 2x$

8) $y'' - 4y = e^{x}[(-4x + 4)\cos x - (2x + 6)\sin x]$

9) $y'' - 2y' + 2y = e^{x}(2\cos x - 4x\sin x)$

10) $y^{(4)} - y = 4\sin x - 8e^{-x} + 1$

11) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$

12) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin 2x\sqrt{\sin 2x}}$

***20**. Giải các phương trình Euler và các phương trình đưa được về phương trình tuyến tính với hệ số hằng số:

1) $x^{2}y'' + 5xy' + 13y = 0$

2) $x^{3}y''' - 3x^{2}y'' + 6xy' - 6y = 0$

3) $(2x + 1)^{2}y'' - 4(2x + 1)y' + 8y = -8x - 4$

4) $x^{2}y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x)$

5) $x^{4}y'' + 2x^{3}y' + n^{2}y = 0$

6) $(1 - x^{2})y'' - xy' + n^{2}y = 0$ (phương trình Tchebichef)

7) $y''\sin x\cos x - y' + m^{2}y\,\mathrm{tg}x\sin^{2}x = 0$

8) $x^{2}y'' + xy' + (x^{2} - \frac{1}{4})y = 0$ (phương trình Bessel)

*__21__. Một chất điểm M khối lượng $m = 1$ chuyển động theo trục Ox dưới tác dụng của:

a) Lực kéo về gốc O tỷ lệ khoảng cách $\overline{OM} = x$

b) Lực cản của môi trường tỷ lệ với vận tốc chuyển động.

c) Ngoại lực hướng theo Ox và có độ lớn là $F(t)$ tại thời điểm t.

1) Lập phương trình chuyển động của M.

2) Xét $F(t) = 0$ và lực cản của môi trường bằng không. Tìm chu kỳ, tần số, biên độ và pha ban đầu của dao động, biết:

$$x\Big|_{t=0} = x_0,\ \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = V_0\,.$$

3) Xét $F(t) = M\sin\omega t$, và lực cản của môi trường bằng không.

22. Giải các hệ phương trình vi phân sau (bằng phương pháp khử hoặc tổ hợp) :

1) $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2xy^2 \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z-x}{x} \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = e^{x-y} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2z}{2x-z^2} \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2} \\ z' = \dfrac{y+z}{z^2 - x} \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = -5y - 5z \end{cases}$$

5) $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = \dfrac{dz}{\dfrac{1}{2}}$

6) $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{0} = \dfrac{dz}{z}$

7) $\dfrac{dx}{mz - ny} = \dfrac{dy}{nx - lz} = \dfrac{dz}{ly - mx}$

8) $\begin{cases} y'' = y^2 + z \\ z' = -2yy' + y \end{cases}$, $y = 1, y' = 1, z = 0$ khi $x = 0$

9) $y' = \dfrac{z + e^y}{z + e^x}$, $z' = \dfrac{z^2 - e^{x+y}}{z + e^x}$

10) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2y + 4z = e^x \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} - y - 3z = -x \end{cases}$

***23**. Giải các hệ phương trình tuyến tính cấp một (theo phương pháp Euler) :

1) $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = -2y + 4z \end{cases}$ $y = 0, z = -1$ khi $x = 0$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 4y \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 12y - 4z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = -x - 12y + 6z \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = z \\ \dfrac{dz}{dt} = -x + z \end{cases}$ $x = 1,\ y = \dfrac{1}{2},\ \ z = \dfrac{1}{2}$, khi $t = 0$.

5) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y + z \\ \dfrac{dz}{dx} = -y - 3z \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y - 3z \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + 2y + 6z \\ \dfrac{dz}{dt} = 6x - 2y - 6z \end{cases}$

7) $\begin{cases} y' = 2y - z + 2e^x \\ z' = 3y - 2z + 4e^x \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 4\cos 2t \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y + 8\cos 2t + 5\sin 2t \end{cases}$

***24**. Giải phương trình sau theo phương pháp toán tử Laplace:

1) $x'' + 2x' + x = t^2e^t$, $x(0) = x'(0) = 0$

2) $x'' + 4x = 3\sin t + 10\cos 3t$; $x(0) = -2$, $x'(0) = 3$

3) $x'' + 2x' + x = 2\cos^2 t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

TRẢ LỜI BÀI TẬP

2.

1) $\cot g^2 y = tg^2 x + c$

2) $x = \dfrac{cy}{\sqrt{1+y^2}}$, $y = 0$

3) $y = \dfrac{cx}{1+ax} + a$

4) $2e^{\frac{y^2}{2}} = \sqrt{e}(1+e^x)$

5) $y = 1$

6) $(8x + 2y + 1) = 2tg(4x + c)$

7) $x + 2y + 3\ln(2x + 3y - 7) = c$

8) $r = \dfrac{c}{1-\cos\varphi}$ hay $y^2 = 2cx + c^2$, (chuyển sang tọa độ độc cực)

9) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \ln\dfrac{y}{x} = c$

10) $2e^y - e^{2x} + 2\text{arctg}y + \ln(1+y^2) = c$

4.

1) $y = cx$ hoặc $y = \dfrac{c}{x}$

2) $T = 20 + 80e^{\frac{-\ln 2}{20}}$, 60 phút.

5.

1) $x = ce^{\frac{x}{y}}$

2) $\sqrt{\dfrac{x}{y}} + + \ln|y| = c$

3) $(x^2 + y^2)^3(x + y)^2 = c$

4) $y = x\sqrt{1 - \frac{3}{8}x}$

5) $(x + y - 1)^3 = c(x - y + 3)$

6) $x^2 + 2y^2 - 2xy + 2y = c$

7) $y = \dfrac{c + 2x^3}{(c - x^3)x}$. Đặt $y = \dfrac{z}{x}$

8) $\ln x + \operatorname{arctg}\sqrt{x^2y^4 - 1} = c$, nghiệm bất thường: $y = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{x}}$ (Đặt $y = \dfrac{z}{\sqrt{x}}$)

6.

1) $(x - y)^2 - cy = 0$

2) paraboloide tròn xoay

7.

1) $y = ce^{-\cos x} - \cos x + 1$

2) $y = ce^{-ax} + \dfrac{1}{m + a}e^{mx}$, $m \neq -a$

$y = ce^{ax}(1 + x)$, $m = -a$

3) $y = (1 + x^2)(c + x)$

4) $\sin y = ce^{-x} + x - 1$. Đặt $\sin y = u$

5) $x\sqrt{1 + y^2} + \cos y = c$. Giải theo $x = x(y)$

6) $y = \dfrac{-1}{x^3} + \dfrac{2}{x^2}$

7) $y = \dfrac{x}{\cos x}$

8) $y^2 = x\ln\frac{c}{x}$

9) $y^3(3 + ce^{\cos x}) = x$

10) $\frac{1}{y} = cx + \ln x + 1$, $\frac{1}{y} = \ln x + 1$

11) $y = \left(\frac{2}{9}e^{x^3} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{9}\right)^3$, $y = 0$

12) $x^2 = ce^{\sin y} - 2a(\sin y + 1)$

8.

1) $xy = cy^2 + a^2$

2) $y = cx^2$. Hoành độ trọng tâm $x_0 = \dfrac{\int_0^x xydx}{\int_0^x ydx}$

3) $y^2 = ce^x - x^2 - 2x - 2$ $(c > 0)$ (phương trình $yy' = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$)

9.

1) $\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = c$

2) $x^2 + y^2 - xy + x - y = c$

3) $\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = 2$

4) $x^2 + y^2 + 2\operatorname{arctg}\frac{x}{y} = c$

5) $\sqrt{1 + x^2 + y^2} + arctg\frac{y}{x} = c$

6) $\ln(x + y) - \frac{y}{x + y} = 0$

7) $\ln|x| - \dfrac{y^2}{x} = c$

8) $\dfrac{1}{y}\ln x + \dfrac{1}{2}y^2 = c$

9) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{y} = c$

10) $(x\sin y + y\cos y - \sin y)e^x = c$

10.

1) a) $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = c$

b) $y - b = c(x - a),\ x \neq a.$

c) $r = 2c\cos\varphi.$

d) $(x^2 + y^2)^2 = c(x^2 - y^2)$

2) a) $r = ce_\varphi$

b) $r = c$

11.

1) $y = cx + c$, không có nghiệm bất thường

2) $y = cx + \sqrt{1 + c^2}$; $x^2 + y^2 = 1$

3) $x = cy + c^2$, $x = -\dfrac{y^2}{4}$

4) $y = c + \dfrac{x^2}{c}$, $y = \pm 2x$

5) $\begin{cases} x = ce^{-p} - 2p + 2 \\ y = c(1 + p)e^{-p} - p^2 + 2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}(cp^{-\frac{1}{2}} - p) \\ y = \dfrac{1}{6}(cp^{\frac{1}{2}} + p^2) \end{cases}$

12.

1) $x = ye^{cy+1}$

2) $xy\left(c - \dfrac{1}{2}\ln^2 x\right) = 1$

3) $y = cx + c\ln c$, $y = -e^{(x+1)}$, nghiệm bất thường

4) $x^3 = ce^y - y - 2$

5) $y = x\arcsin cx$

6) $p^2 + 4y^2 = cy^3$

7) $y = 2$

8) $y = c(x-c)^2$, $y = \dfrac{4}{27}x^3$, nghiệm bất thường

13.

1) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1} + c_1 x + c_2$

2) $y = e^x + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + c_1 x + c_2$

3) $x = \sin t \quad 2t$

$$y = \frac{3}{8}\sin 2t - \frac{t}{4}\cos 2t + (c_1 - 2 - t^2)\sin t + (\frac{1}{2} - 2c_1)t + \frac{2}{3}t^3 + c_2.$$

Đặt $y'' = t$.

4) $x = e^{-t} + t$, $y = (\dfrac{t}{2} + \dfrac{3}{4})e^{2t} + (\dfrac{t^2}{2} - 1 + c_1)e^{t} + \dfrac{t^3}{6} + c_1 t + c_2$

5) $y = -c_1x + (c_1^2 + 1)\ln(c_1 + x)$

6) $y = \dfrac{x^2-1}{2(e^2-1)} - \dfrac{(e^2-1)}{4}\ln|x|$ hay $y = \dfrac{1-x^2}{2(e^2+1)} + \dfrac{e^2+1}{4}\ln|x|$

7) $y = \dfrac{1}{2}x^2$

8) $y = \sec^2 x$

9) $(c_1y-1)^{\frac{3}{2}} = \pm\dfrac{3c_1}{2}x + c_2$

10) $x = c_1 + \ln\left|\dfrac{y-c_2}{y+c_2}\right|$

11) $y = \dfrac{1}{12}(c_1+x)^4 + c_2x + c_3$

14.

1) Đường tròn

2) $e^{ay+c_2} = \sec(ax + c_1)$

3) $s = \dfrac{m}{K}\ln ch(t\sqrt{g\dfrac{K}{m}})$ phương trình chuyển động:

$$\frac{md^2s}{dt^2} = mg - K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

15.

1) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

2) $x^2y'' - xy' + y = 0$

3) $(1 - x^2)y''\ \ xy' + y = 0$

4) $x^2y'' - xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$

16.

1) $y = c_1e^x + c_2\sin x$

2) $y = c_1\sqrt{1+x} + c_2\sqrt{1-x}$

3) $y_1 = x^2 + 1,\ y = c_1(x^2 + 1) + c_2e^x$

4) $n = 1,\ y_1 = x,\ y = c_1x + c_2\{1 + \frac{x}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\}$

$n = 2,\ y_1 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},\ \ y = c_1(3x^2 - 1) + c_2[8x + (3x^2 - 1)\ \ln\frac{x-1}{x+1}]$

5) $y_1 = -x + 1,\ \ y = (x - 1)\{c_1 + c_2\int\frac{e^x dx}{x(x-1)^2}]$

17.

1) $y = c_1x + \frac{c_2}{x} + \frac{x'}{3}$

2) $y = c_1 + c_2\sin x + c_3\cos x + \ln|\sec x + \mathrm{tg}x| + \sin x\ \ln|\cos x| - x\cos x$

3) $y = c_1e^{x\sqrt{2}} + c_2e^{-x\sqrt{2}} + e^{x^2}$

4) $y = \frac{e^x}{x} + c_1 + c_2e^x$

5) $y = c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x + \frac{1}{\cos x} + \cos x\ \ln|\cos x| + \sin x(x - \mathrm{tg}x)$

18.

1) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{4x}$

2) $y = c_1 + c_2e^{2x}$

3) $y = e^{\frac{x}{2}}(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

4) $y = c_1e^x + e^{-\frac{x}{2}}(c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

5) $y = c_1e^{2x} + c_2\cos 3x + c_3\sin 3x$

6) $y = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3\cos 3x + c_4\sin 3x$

7) $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x$

8) $y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}(c_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x)$

$+ e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}(c_3 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x)$

19.

1) $y = x^3 + x + c_1 + c_2e^{4x}$

2) $y = e^x$ [illegible] $1 + c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$

3) $y =$ [illegible] $+ 3x + \frac{7}{2} + c_1e^{x} + c_2e^{2x}$

4) $y = \frac{1}{2}x^2e^{2x} + e^{2x}(c_1 + c_2x + c_3x^2)$

5) $y = xe^x + c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x$

6) $y = -2\sin 2x + c_1\cos x + c_2\sin x$

7) $y = \frac{1}{2}x\sin x + \frac{1}{3}\cos 2x + c_1\cos x + c_2\sin x$

8) $y = e^x(x\cos x + \sin x) + c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$

9) $y = x^2e^x\cos x + e^x(c_1\cos x + c_2\sin x)$

10) $y = x\cos x + 2xe^{-x} - 1 + c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x$

11) $y = \frac{1}{4}\cos 2x \ln|\cos 2x| + \frac{x}{2}\sin 2x + c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$

12) $y = -\sqrt{\sin 2x} + c_1\cos x + c_2\sin x$

20.

1) $y = \frac{1}{x^2}[c_1\cos(3\ln x) + c_2\sin(3\ln x)$

2) $y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$

3) $y = (2x + 1)\ln(2x + 1) + c_1(2x + 1) + c_2(2x + 1)^2$

4) $y = -\ln x\cos(\ln x) + c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x)$

5) $y = c_1\cos\frac{n}{x} + c_2\sin\frac{n}{x}$

6) $y = c_1\cos(n\,\mathrm{arc}\cos x) + c_2\sin(n\,\mathrm{arc}\cos x)$

7) $y = c_1\cos(m\ln\cos x) + c_2\sin(m\ln\cos x)$

8) $y = c_1\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_2\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

21.

1) Phương trình chuyển động: $\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = F(t)$,

$a, b = \text{const}$, các hệ số tỷ lệ

2) $x = A\sin(\sqrt{b}.t + \varphi)$

$\sqrt{b}$ là tần số dao động, $T = \frac{2\pi}{\sqrt{b}}$ là chu kỳ dao động.

$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{b}}$, $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{b}x_0}{v_0}$ là pha ban đầu.

3) $x = \frac{M}{b - w^2}\sin\omega t + A\sin(\sqrt{b}.t + \varphi)$, $\omega \neq \sqrt{b}$

$$x = \frac{M}{-2\sqrt{b}} t \cos\sqrt{b}.t \ + A\sin(\sqrt{b}.t \ + \varphi) \ , \ \omega = \ \sqrt{b}$$

22.

1) $y = -\dfrac{1}{x^2 + c_1}$, $z = x(c_2 - \ln|x|)$

2) $e^y - e^x = c_1$, $x = z(c_2 - \dfrac{1}{2} z)$

3) $y = c_1 x^2 + \dfrac{1}{4c_1}$, $\dfrac{z^3}{3} - xz - \dfrac{c_1}{3} x^3 - \dfrac{1}{4c_1} x = c_2$

$y = x$, $\dfrac{z^3}{3} - xz - \dfrac{x^2}{2} = c$, $y = -x$, $\dfrac{z^3}{3} - xz + \dfrac{x^2}{2} = c$

4) $y = c_1 + c_2 e^{-4x}$, $z = -c_1 - 5c_2 e^{-4x}$

5) $\sqrt{y} - \sqrt{x} = c_1$, $z - \sqrt{x} = c_2$

6) $y = c_1$, $\dfrac{z}{x} = c_2$

7) $x^2 + y^2 + z^2 = c_1^2$, $lx + my + nz = c_2$

8) $y = e^x$, $z = e^x - e^{2x}$.

9) $ze^{-x} + y = c_1$, $ze^{-y} + x = c_2$

10) $y = c_1 e^{x\sqrt{2}} + c_2 e^{-x\sqrt{2}} + c_3 \cos x + c_4 \sin x + e^x - 2x$

$$z = -c_1 e^{x\sqrt{2}} - c_2 e^{-x\sqrt{2}} - \frac{c_3}{4}\cos x - \frac{c_4}{4}\sin x - \frac{1}{2}e^x + x$$

23.

1) $\begin{cases} y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \\ z = c_1 e^{2x} + 2c_2 e^{3x} \end{cases}$, $\begin{cases} y = e^{2x} - e^{3x} \\ z = e^{2x} - 2e^{3x} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 5c_1 \cos 2t + 5c_2 \sin 2t \\ y = (-4c_1 + 2c_2)\cos 2t - (2c_1 + 4c_2)\sin 2t \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = -2c_1e^t - 8c_2e^{2t} - 3c_3e^{3t} \\ y = c_1e^t + 3c_2e^{2t} + c_3e^{3t} \\ z = 2c_1e^t + 7c_2e^{2t} + 3c_3e^{3t} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = (c_2 + c_3)\cos t + (-c_2 + c_3)\sin t \\ y = c_1e^t + c_2\cos t + c_3\sin t \\ z = c_1e^t - c_2\sin t + c_3\cos t \end{cases}$, $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \dfrac{1}{2}(\cos t + \sin t) \\ y = \dfrac{1}{2}(\cos t - \sin t) \end{cases}$

5) $\begin{cases} y = e^{-2x}(c_1 + c_2x) \\ z = e^{-2x}[c_1 + c_2(1 - x)] \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = c_1 + c_3e^{-t} \\ y = 3c_1 - 3c_2 - 2c_3e^{-t} \\ z = c_2 + 2c_3e^{-t} \end{cases}$

7) $\begin{cases} y = xe^x + c_1e^x + c_2e^{-x} \\ z = (x+1)e^x + c_1e^x + c_2e^{-x} \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = 2\cos 2t + 3\sin 2t + 2e^{-\frac{1}{2}}\left(c_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + c_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ y = 7\sin 2t + e^{-\frac{1}{2}}\left[(c_1 - \sqrt{3}c_2)\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + (c_1\sqrt{3} + c_2)\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right] \end{cases}$

24.

1) $x = \dfrac{t^2e^t}{12}$

2) $x = \sin t + \sin 2t - 2\cos 3t$

3) $x = 1 - \dfrac{22}{55}e^{-t} - \dfrac{6}{5}te^{-t} - \dfrac{3}{25}\cos 2t + \dfrac{4}{25}\sin 2t$

Chương 13

LÝ THUYẾT VỀ CHUỖI

Trong các chương trước, ta đã nghiên cứu các khái niệm cơ bản, cũng như các quy luật của giải tích toán học. Để kết thúc giáo trình này, trong chương này ta sẽ nghiên cứu một lý thuyết, cho những kỹ thuật tính toán để phục vụ cho giải tích toán học và các khoa học dựa vào nó, gọi là lý thuyết về chuỗi.

A. CHUỖI SỐ

§1. KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Định nghĩa

Cho một dãy vô hạn các số: $u_1, u_2, ..., u_n$... Ta gọi biểu thức $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ là một chuỗi số, các số $u_1, u_2, ..., u_n$ ... gọi là các số hạng (hay các từ) của chuỗi.

Ký hiệu: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ (1) $(\infty = +\infty)$

Thí dụ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$$

Ở đây

$$u_1 = \frac{1}{2},\quad u_2 = \frac{1}{2^2},\dots, u_n = \frac{1}{2^n}\dots$$

Vì u_n thể hiện dạng chung của các số hạng của chuỗi nên người ta gọi u_n là số hạng tổng quát hay số hạng thứ n của chuỗi.

Tổng của n số hạng đầu tiên của chuỗi: $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi, ký hiệu:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

Theo định nghĩa thì:

$$S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3,\ \dots$$

Bây giờ ta đưa ra khái niệm tổng của chuỗi. Theo định nghĩa thì chuỗi số là một tổng gồm vô số số hạng, cho nên nếu quan niệm tổng của chuỗi là tổng thông thường thì không thể được, vì không thể làm được phép cộng vô số số hạng. Người ta đưa ra định nghĩa tổng của chuỗi như sau:

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ tồn tại thì ta gọi giới hạn này là tổng của chuỗi, ký hiệu là $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Lúc đó ta cũng nói chuỗi là hội tụ (về S) ngược lại nếu giới hạn đó không tồn tại hay bằng ∞ thì người ta nói chuỗi là phân kỳ.

Ta cũng ký hiệu $\quad S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$

Thí dụ:

Xét chuỗi nhân (cấp số nhân)

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots,\ a \neq 0$$

q gọi là công bội của chuỗi. Ở trung học ta đã biết: $S_n = a\dfrac{1-q^n}{1-q}$

Nếu $|q| < 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$: chuỗi hội tụ.

Nếu $|q| > 1$ thì $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$, lúc đó $S_n \to \infty$: chuỗi phân kỳ.

Nếu $q = 1$ thì chuỗi có dạng $a + a + \ldots + a + \ldots$, lúc đó $S_n = na$ và $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$: chuỗi phân kỳ.

Nếu $q = -1$ thì chuỗi có dạng: $a - a + a - a + \ldots$ Xét tổng S_n nếu n chẵn thì $S_n = 0$, nếu n lẻ thì $S_n = a$, như vậy khi $n \to \infty$ thì $S_n \to 0$ hoặc $S_n \to a$, theo định nghĩa giới hạn thì $\lim_{n\to\infty} S_n$ là không tồn tại, do đó chuỗi phân kỳ.

Tóm lại, chuỗi nhân chỉ hội tụ khi $|q| < 1$, lúc đó tổng của nó là $S = \dfrac{a}{1-q}$.

1.2. Điều kiện hội tụ: Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1)

với điều kiện nào thì chuỗi hội tụ, định lý sau đây cho ta điều kiện cần của sự hội tụ.

Định lý: ***Nếu chuỗi (1) hội tụ thì số hạng tổng quát $u_n \to 0$ khi $n \to \infty$.***

Thực vậy vì:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = S_{n-1} + u_n.$$

nên $u_n = S_n - S_{n-1}$, theo giả thiết chuỗi hội tụ nghĩa là $S_n \to S$, $S_{n-1} \to S$ khi $n \to \infty$ do đó:

$$u_n \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Định lý này chỉ là ***điều kiện cần*** của sự hội tụ, vì có những chuỗi có $u_n \to 0$ nhưng chuỗi vẫn phân kỳ.

Thí dụ:

Xét chuỗi $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \ldots$$

gọi là chuỗi điều hòa.

Ở đây $u_n = \frac{1}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$, xét $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$. Áp dụng bất đẳng thức $x > \ln(1 + x)$ với $\forall x > 0$ thì:

$$1 > \ln(1 + 1),\ \frac{1}{2} > \ln(1 + \frac{1}{2}),\ ....,\ \frac{1}{n} > \ln(1 + \frac{1}{n}).$$

lúc đó

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} > \ln(1 + 1) + \ln(1 + \frac{1}{2}) + ... + \ln(1 + \frac{1}{n}).$$

$$= \ln(2.\frac{3}{2}.\frac{4}{3}...\frac{n+1}{n}) = \ln(n + 1)$$

khi $n \to \infty$ thì $\ln(n + 1) \to \infty$, do đó $S_n \to \infty$ và chuỗi phân kỳ.

Vì định lý trên chỉ là điều kiện cần của sự hội tụ nên có ít tác dụng trong thực tiễn, thực tiễn cần biết với điều kiện nào thì chuỗi hội tụ (điều kiện đủ của sự hội tụ ta sẽ xét ở phần sau). Nhưng hệ quả của nó mà ta xét sau đây lại có tác dụng lớn trong thực tiễn vì nó nói lên điều kiện đủ của phân kỳ.

Hệ quả: ***Nếu u_n không dần tới không $n \to \infty$, thì chuỗi phân kỳ.***

Thực vậy, cho trước một chuỗi thì nó có thể xảy ra hai khả năng: hội tụ hoặc phân kỳ, nếu chuỗi hội tụ thì theo định lý trên: $u_n \to 0$, khi $n \to \infty$ trái với giả thiết ở đây $u_n \nrightarrow 0$. Vậy chỉ còn khả năng thứ hai tức là chuỗi phân kỳ.

Thí dụ:

Xét chuỗi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} ... + \frac{n}{n+1} + ...$$

Xét $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$. Vậy chuỗi phân kỳ.

Định lý 2: (Điều kiện Cauchy)

Điều kiện cần và đủ để chuỗi (1) hội tụ là:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0, \forall m > n_0 \Rightarrow |S_n - S_m| < \varepsilon.$$

hay

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_n| < \varepsilon \ (m < n) \qquad \text{(c)}$$

Thực vậy, theo định nghĩa sự hội tụ của chuỗi tương đương với sự hội tụ của dãy S_n, theo nguyên lý Cauchy, dãy S_n hội tụ nếu nó là 1 dãy cơ bản, tức là nó thỏa mãn điều kiện (c).

Thí dụ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ (thoả mãn điều kiện Cauchy (trang 25 tập I))

1.3. Tính chất của chuỗi hội tụ: Ta xét một số tính chất quan trọng của chuỗi hội tụ qua:

Định lý 1:

Nếu các chuỗi: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ***(1)*** **và** $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ **(2)**

hội tụ và có tổng là S và σ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ ***(3) cũng hội tụ và có tổng là*** $S \pm \sigma$.

Chứng minh: Gọi tổng riêng thứ n của (1), (2) và (3) lần lượt là S_n, σ_n và T_n thì rõ ràng $T_n = S_n + \sigma_n$. Theo giả thiết $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, $\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} \sigma_n = S + \sigma$, theo định nghĩa chuỗi (3) là hội tụ và có tổng $S + \sigma$.

Định lý 2:

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ***(1) hội tụ và có tổng là S thì chuỗi*** $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ ***(2),*** $C = const \neq 0$ ***cũng hội tụ và có tổng là CS. Ngược lại nếu chuỗi (1) phân kỳ thì chuỗi (2) cũng là phân kỳ.***

Chứng minh: Gọi tổng riêng thứ n của (1), (2) lần lượt là S_n và T_n thì rõ ràng $T_n = C.S_n$, theo giả thiết nếu chuỗi (1) hội tụ nghĩa là $S_n \to S$ thì $T_n \to C.S$. Do đó chuỗi (2) là hội tụ và có tổng là $C.S$. Nếu chuỗi (1) phân kỳ nghĩa là S_n, không có giới hạn hoặc dần tới ∞ lúc đó T_n cũng vậy, do đó chuỗi (2) phân kỳ.

Định lý 3: ***Sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi không thay đổi khi bỏ đi một số hữu hạn số hạng đầu của chuỗi.***

Chứng minh:

Cho chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

bỏ đi k số hạng đầu $u_1 + u_2 + \ldots + u_k$, ta còn chuỗi

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_{k+n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n} \qquad (2)$$

Gọi tổng riêng thứ n của (1) và (2) là S_n và σ_n thì rõ ràng: $S_{n+k} = S_k + \sigma_n$ trong đó $S_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_k$ là 1 số cố định nếu (1) hội tụ thì $S_{n+k} \to S$, do đó $\sigma_n \to S - S_k$ lúc đó chuỗi (2) hội tụ. Nếu chuỗi (1) phân kỳ thì S_{k+n} không dần tới một giới hạn nào hoặc dần tới ∞, do đó σ_n cũng vậy, nghĩa là chuỗi (2) phân kỳ.

Chú ý: Trong định lý bỏ một số hữu hạn số hạng đầu nhưng có thể bỏ đi một số hữu hạn số hạng ở quãng giữa cũng thế, vì có thể bỏ luôn cả các số hạng từ đầu đến hết quãng giữa này tức là cũng chỉ bỏ đi một số hữu hạn số hạng đầu.

§2. CHUỖI DƯƠNG

Trong § này ta sẽ xét một loại chuỗi đặc biệt, gọi là chuỗi dương, loại chuỗi này rất quan trọng vì nhiều khi xét một chuỗi bất kỳ đưa được về việc xét một chuỗi dương.

2.1. Định nghĩa và điều kiện hội tụ

Chuỗi dương là chuỗi mà các số hạng của nó đều là những số dương:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1) \quad u_n > 0,\ n = 1, 2, .., n, \dots$$

suy ra $s_1 < s_2 < s_3 \dots < s_n < \dots$ Nghĩa là dãy s_n tăng, nếu s_n bị chặn trên thì theo tiêu chuẩn tồn tại giới hạn Weierstrass, s_n sẽ dần tới một giới hạn nào đó, lúc đó chuỗi là hội tụ.

Mặt khác, nếu chuỗi hội tụ thì $S_n \to S$ suy ra S_n phải bị chặn,vậy ta có:

Định lý: ***Điều kiện cần và đủ để chuỗi dương (1) hội tụ là tổng riêng S_n của nó phải bị chặn trên.***

Thí dụ:

Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} = \frac{1}{2 + 1} + \frac{1}{2^2 + 1} + \dots + \frac{1}{2^n + 1} + \dots$$

Ta có:

$$S_n = \frac{1}{2 + 1} + \frac{1}{2^2 + 1} + \dots + \frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

nhưng

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$$

(vì chuỗi nhân $a = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$).

Do đó $S_n < 1$, nghĩa là S_n bị chặn trên theo điều kiện trên chuỗi đã cho là chuỗi hội tụ.

Như đã biết, theo định nghĩa muốn xét sự hội tụ của chuỗi ta phải tìm $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$, nhưng việc tìm giới hạn này nhiều khi không thể làm được. Thực tiễn, nhiều khi chỉ cần biết chuỗi có hội tụ hay không mà không cần đòi hỏi tính tổng S một cách chính xác. Do đó đối với chuỗi dương, dùng điều kiện trên thì thuận lợi hơn nhiều. Nhưng xét sự bị chặn của S_n nhiều khi cũng rất phức tạp. Do đó để xét được thuận lợi hơn, người ta dựa vào điều kiện trên và đưa ra các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi sau đây:

2.2. Tiêu chuẩn so sánh

Cho hai chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1) \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \qquad (2)$$

a) Nếu $\forall n \ge n_0$ $(n_0 \in N)$ ta có $u_n \le cv_n$, $c > 0$, và nếu chuỗi (2) hội tụ thì chuỗi (1) hội tụ, chuỗi (1) phân kỳ thì chuỗi (2) phân kỳ.

b) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = k$, $0 < k < +\infty$ thì hai chuỗi (1) và (2) đồng thời hội tụ hay phân kỳ.

$k = 0$ (2) hội tụ thì (1) hội tụ.

$k = +\infty$ (2) phân kỳ thì (1) phân kỳ.

Chứng minh:

a) Gọi S_n và σ_n là tổng riêng của (1) và (2). Giả sử $u_n \le cv_n$ từ $n = 1$ trở đi, vì nếu không ta bỏ đi quãng đầu của chuỗi và lại đánh số lại từ $n = 1$ trở đi, suy ra $S_n \le c\sigma_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Theo giả thiết, chuỗi (2) hội tụ thì σ_n bị chặn: $\sigma_n < M$, do đó: $S_n < cM$, nghĩa là S_n cũng bị chặn, theo điều kiện trên, chuỗi (1) là hội tụ.

Nếu chuỗi (1) phân kỳ thì $S_n \to \infty$, do đó $\sigma_n \to \infty$ lúc đó chuỗi (2) là phân kỳ.

b) Xét $0 < k < +\infty$, giả sử (2) hội tụ, theo định nghĩa: giới hạn và theo giả thiết thì $\forall \varepsilon > 0$,

$\forall n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} - k \right| < \varepsilon$, do đó $\frac{u_n}{v_n} < k + \varepsilon$ hay $u_n < (k + \varepsilon)\, v_n$ chuỗi (2) hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(k+\varepsilon)v_n$ hội tụ (tính chất của chuỗi hội tụ) do đó theo a) thì chuỗi (1) hội tụ. Bây giờ giả sử (2) phân kỳ, từ giả thiết suy ra: $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{k}$ $(0 < \frac{1}{k} < +\infty)$. Rõ ràng (1) phải phân kỳ vì nếu nó hội tụ thì theo chứng minh trên, chuỗi (2) là hội tụ, trái với giả thiết. Dễ dàng suy ra các trường hợp sau của kết luận.

Thí dụ:

1) Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} \qquad (1)$$

ta có $n! = 1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n > 2.\ 2\ldots 2 = 2^n$ ($n \geq 4$) nên $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n}$, $(n > 4)$. Ta biết chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ là chuỗi nhân $q = \frac{1}{2} < 1$, nên nó hội tụ theo tiêu chuẩn: (1) là hội tụ.

2) Xét chuỗi

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n} \qquad (1)$$

ta có $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ $(n \geq 2)$ ta biết chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ là chuỗi điều hòa phân kỳ, do đó chuỗi (1) là phân kỳ.

3) Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2n} \qquad (1)$$

vì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2n}}{\dfrac{1}{n}} = \dfrac{\pi}{2} > 0$, mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ phân kỳ do đó chuỗi (1) phân kỳ.

Chú ý:

Hệ quả: ***Nếu*** $\forall n > n_0$ $(n_0 \in N)$ ***ta có*** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ $(u_n, v_n \neq 0)$ ***và (2) hội tụ ((1) phân kỳ) thì (1) hội tụ, ((2) phân kỳ).***

Thực vậy, theo giả thiết thì:

$$\frac{u_2}{u_1} \le \frac{v_2}{v_1}, \quad \frac{u_3}{u_2} \le \frac{v_3}{v_2}, \ldots, \frac{u_n}{u_{n-1}} \le \frac{v_n}{v_{n-1}}.$$

nhân vế với vế ta có:

$$\frac{u_n}{u_1} \le \frac{v_n}{v_1} \quad hay \quad u_n \le \frac{u_1}{v_1}.v_n$$

Từ phần a) của định lý ta suy ra kết luận của hệ quả.

2.3. Tiêu chuẩn D' Alambert

Cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ ***và*** $\begin{cases} l < 1 \text{ thì chuỗi hội tụ} \\ l > 1 \text{ thì chuỗi phân kỳ} \end{cases}$

Chứng minh:

Xét $l < 1$, theo giả thiết: $\forall n > n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon$. Chọn ε sao cho $l + \varepsilon < 1$ và đặt $l + \varepsilon = q$ thì $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < q$ hay $u_{n+1} < qu_n$ $(\forall n > n_0)$ suy ra $u_{n+2} < qu_{n+1} = q^2u_n$; $u_{n+3} = q^3u_n \ldots$

Do đó ta thấy các số hạng của chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_{n+i}$ nhỏ hơn các số hạng tương ứng của chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} q^i u_n$, đây là một chuỗi nhân hội tụ vì công bội $q < 1$, theo tiêu chuẩn so sánh chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} u_{n+i}$ là hội tụ, theo tính chất của chuỗi hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ.

Bây giờ xét $l > 1$, thì $\forall n > n_0$ ta sẽ có $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ hay $u_{n+1} > u_n$, suy ra u_n tăng, do đó không thể dần tới không, theo điều kiện đủ của sự phân kỳ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là phân kỳ.

Thí dụ:

1) Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{(n+1)}{n} = \frac{1}{2} < 1$$

do đó chuỗi là hội tụ.

2) Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{10n}$ ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{10(n+1)} \cdot \frac{10n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1$$

Do đó chuỗi là phân kỳ.

Chú ý:

1) Trong tiêu chuẩn không xét trường hợp $l = 1$ vì có khi chuỗi hội tụ, cũng có khi chuỗi phân kỳ.

Thí dụ:

Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1$$

nhưng chuỗi hội tụ (theo thí dụ ở 1.2), mặt khác xét chuỗi điều hòa

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ > 1, nhưng khi đã biết: chuỗi điều hòa phân kỳ.

2) Nếu $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$ thì chuỗi phân kỳ. Vì khi đó: $\exists n_0$, $n>n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ hay $u_{n+1}>u_n$.

2.4. Tiêu chuẩn Cauchy

Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

Nếu $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$ ***và*** $\begin{cases} l<1 & \textit{thì chuỗi hội tụ}\\ l>1 & \textit{thì chuỗi phân kỳ}\end{cases}$

Chứng minh:

Nếu $l<1$ theo giả thiết và tương tự như chứng minh tiêu chuẩn D'Alambert, ta có $\forall n>n_o$: $\sqrt[n]{u_n}<l+\varepsilon$, chọn ε sao cho $l+\varepsilon<l$ và đặt

$$l+\varepsilon=q \text{ thì } \sqrt[n]{u_n}<q \text{ hay } u_n<q^n.$$

Suy ra

$$u_{n+1}<q^{n+1}, u_{n+1}<q^{n+1},\ldots$$

do đó chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty}u_{n+i}$ có các số hạng nhỏ hơn các số hạng tương ứng của chuỗi nhân hội tụ. $\sum_{i=1}^{\infty}q^{n+i}$ (vì $q<1$). Suy ra chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty}u_{n+i}$ hội tụ theo tính chất của chuỗi thì chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty}u_n$ cũng hội tụ.

Nếu $l>1$ thì từ một n nào đó, ta sẽ có: $\sqrt[n]{u_n}>1$ hay $u_n>1$ do đo u_n không thể dần đến không và chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty}u_n$ là phân kỳ.

Thí dụ:

1) Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

Ta có $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$

vậy chuỗi hội tụ.

2) Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} . \frac{1}{2^n}$

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{2} > 1$$

vậy chuỗi phân kỳ.

Chú ý:

1) Tiêu chuẩn này cũng không xét trường hợp $l = 1$, vì tương tự như tiêu chuẩn D' Alambert có khi chuỗi hội tụ cũng có khi phân kỳ.

2) Nếu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \infty$ thì chuỗi phân kỳ.

*2.5. Tiêu chuẩn Raabe

Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ***(1)***

Nếu $\lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = R$ ***và*** $\begin{cases} R > 1 \text{ thì chuỗi hội tụ} \\ R < 1 \text{ thì chuỗi phân kỳ} \end{cases}$

Chứng minh:

Xét $R > 1$ theo giả thiết có $\forall n > n_0$: $\exists r$: $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > r > 1$

hay $$\frac{u_n}{u_{n-1}} > 1 + \frac{r}{n} \qquad (2)$$

Lấy một số s bất kỳ: $r > s > 1$ thì như ta đã biết:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} = s$$

và

$$\forall n > n_0: \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} < r$$

hay $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{r}{n} \qquad (3)$$

So sánh (2) và (3) ta có: $\frac{u_n}{u_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^s$ hay

$$\frac{u_{n-1}}{u_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^s = \frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}}$$

Rõ ràng chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, $s > 1$ là hội tụ (?) theo hệ quả của tiêu chuẩn so sánh thì chuỗi (1) hội tụ. Tương tự dễ dàng suy ra kết quả cho $R < 1$.

Thí dụ:

1) Xét chuỗi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} \quad (x > 0)$$

Theo tiêu chuẩn D' Alambert:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{x+n+1} = 1$$

không kết luận được chuỗi hội tụ hay phân kỳ.

Theo tiêu chuẩn Raabe.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{n+1} = x$$

$$\begin{cases} x > 1 & \text{chuỗi hội tụ} \\ x < 1 & \text{chuỗi phân kỳ} \\ x = 1 & \text{chuỗi điều hòa phân kỳ} \end{cases}$$

2.6. Tiêu chuẩn tích phân Cauchy

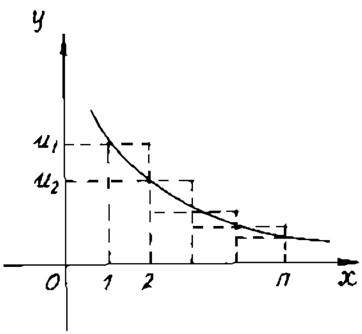
Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, nếu lập được hàm $f(x) > 0$ liên tục và đơn điệu giảm $\forall x \geq 1$, sao cho $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2$,..., $f(n) = u_n$,... và nếu tích phân $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ (phân kỳ) thì chuỗi hội tụ (phân kỳ).

Chứng minh:

Vẽ đường cong $y = f(x)$ trong khoảng $[1, n]$ và gọi S là diện tích hình thang cong ứng với cạnh cong $y = f(x)$ trong khoảng đó thì theo hình vẽ ta có (H.195)

$$u_2.1 + u_3.1 + ... + u_n.1 < S <$$

$$< u_1.1 + u_2.1 + ... + u_{n-1}.1$$



Hình 195

nhưng:

$$u_2 + u_3 + \ldots + u_n = S_n - u_1,\ \ u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} = S_n - u_n$$

do đó: $\quad S_n - u_1 < \int\limits_1^n f(x)dx < S_n - u_n$ hay: $S_n < \int\limits_1^n f(x)dx + u_1 \qquad (1)$

và $$S_n > \int\limits_1^n f(x)dx + u_n \qquad (2)$$

Từ (1) ta thấy, nếu tích phân hội tụ thì chuỗi hội tụ và từ (2) ta thấy tích phân phân kỳ thì chuỗi phân kỳ.

Thí dụ:

1) Xét chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^2 n}$, ta thấy u_n giảm dần.

Lập hàm $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^2 x}$ thì rõ ràng $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện của tiêu chuẩn:

$$f(n) = \frac{1}{n \ln^2 n} = u_n \ \ (n = 2, 3, \ldots)$$

Tính

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int\limits_2^{\infty} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = \left(\frac{-1}{\ln x}\right)\Bigg|_2^{\infty} = \frac{1}{\ln 2}$$

nghĩa là tích phân hội tụ, vậy chuỗi hội tụ.

2) Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ ($\alpha > 0$ chuỗi Dirichlet), lập hàm $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$, rõ ràng $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện của tiêu chuẩn: $f(n) = \dfrac{1}{n^{\alpha}}$,... như đã biết (chương 8): $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ hội tụ khi $\alpha > 1$, phân kỳ $\alpha \le 1$. Vậy chuỗi Dirichlet hội tụ khi $\alpha > 1$, phân kỳ khi $\alpha \le 1$.

Tóm lại: ***muốn xét sự hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi dương:***

Trước hết ta xét $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ ***nếu giới hạn này*** $\neq 0$ ***thì kết luận ngay chuỗi phân kỳ, nếu giới hạn bằng 0 thì tiếp tục xét.***

Dùng tiêu chuẩn so sánh, D'Aalmbert, Cauchy, Raabe hay tích phân Cauchy, nếu dùng tiêu chuẩn so sánh thì có thể dựa vào các chuỗi hội tụ:

Chuỗi nhân $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ *(q <1) và chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *(α > 1) hoặc các chuỗi phân kỳ:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *(α < 1).*

Chú ý:

Cho chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ ***(1). Xét chuỗi*** $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n = u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n + \ldots$ ***(2), có được bằng cách thay đổi tuỳ ý thứ tự các số hạng của (1) nếu (1) hội tụ thì (2) hội tụ và cũng có tổng như của (1).***

Thực vậy, xét tổng thứ n của (2). $S'_n = u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n$. Rõ ràng $\exists n_0 \in N$ sao cho $S'_n \leq S_{n_0}$ (3) S_{n_0} là tổng riêng thứ n_0 của (1).

Theo giả thiết (1) hội tụ, do đó từ (3) suy ra chuỗi (2) hội tụ.

Giả sử (1) (2) lần lượt có tổng là S, S'. Theo (3) ta suy ra $S' \leq S$. Lý luận tương tự (theo cách đối xứng) ta có $S' \geq S$. Vậy $S' = S$.

§3. CHUỖI CÓ DẤU BẤT KỲ

3.1. Định nghĩa

Chuỗi có dấu bất kỳ là chuỗi mà các số hạng của nó có dấu bất kỳ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

với u_n ***có dấu bất kỳ.***

Thí dụ:

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots$$

Đặc biệt chuỗi có dạng:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}.u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$$

với $u_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, gọi là chuỗi đan dấu.

Chuỗi có các số hạng là trị số tuyệt đối của các số hạng của chuỗi có dấu bất kỳ (1): $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ (2) gọi là chuỗi trị số tuyệt đối của nó.

Nếu chuỗi (1) hội tụ mà chuỗi (2) cũng hội tụ thì chuỗi (1) gọi là hội tụ tuyệt đối.

Nếu chuỗi (1) hội tụ mà chuỗi (2) phân kỳ thì chuỗi (1) gọi là bán hội tụ hay hội tụ có điều kiện.

Các điều kiện và tiêu chuẩn hội tụ đối với chuỗi dương tất nhiên không áp dụng được cho chuỗi có dấu bất kỳ, nhưng một số trường hợp có thể đưa việc xét chuỗi có dấu bất kỳ về việc xét chuỗi dương. Sau đây ta sẽ đưa ra các điều kiện hội tụ đối với chuỗi có dấu bất kỳ.

3.2. Điều kiện hội tụ

Định lý 1: ***Nếu chuỗi trị số tuyệt đối $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ (2) hội tụ thì chuỗi có dấu bất kỳ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ (1) hội tụ tuyệt đối.***

Chứng minh:

Theo giả thiết (2) hội tụ nên theo điều kiện Cauchy (§1-định lý 2)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, \forall m > n_0, m < n$$

$$\Rightarrow \quad \left| |u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \dots + |u_n| \right| < \varepsilon.$$

mặt khác.

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_n| \le |u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \ldots |u_n| < \varepsilon.$$

Vậy chuỗi (1) thỏa mãn điều kiện Cauchy nên nó hội tụ, theo định nghĩa, nó hội tụ tuyệt đối.

Thí dụ:

1) Xét chuỗi

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \ldots$$

chuỗi trị số tuyệt đối của nó là:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

đây là chuỗi nhân hội tụ (vì $q = \dfrac{1}{2} < 1$). Do đó chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối.

2) Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n^3}$, ta có $\left|\dfrac{\cos n}{n^3}\right| \le \dfrac{1}{n^3}$ mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ hội tụ (chuỗi dạng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha = 3 > 1$: hội tụ).

Vậy theo định lý, chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối.

Định lý 2:

Nếu chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.u_n$ (1) có u_n đơn điệu giảm và dần đến 0 khi $n \to \infty$ thì nó hội tụ và có tổng $S \le u_1$.

Chứng minh:

Xét tổng riêng của 1 số chẵn số hạng.

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Theo giả thiết u_m đơn điệu giảm nên $u_1 - u_2 > 0$, $u_3 - u_4 > 0, \ldots$, $u_{2m-1} - u_{2m} > 0$. Do đó $S_{2m} > 0$ vì $S_{2m+2} = S_{2m} + (u_{2m+1} - u_{2m+2})$ nên $S_{2m} < S_{2m+2}$ nghĩa là S_{2m} tăng. Mặt khác:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

cũng theo giả thiết các hiệu trong ngoặc đều dương, suy ra: $S_{2m} \le u_1$, nghĩa là S_{2m} bị chặn. Do đó $S_{2m} \to S$ khi $n \to \infty$. Xét $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$ theo giả thiết $u_{2m+1} \to 0$ theo trên, $S_{2m} \to S$, do đó $S_{2m+1} \to S$. Như vậy tổng riêng S của chuỗi đan dấu (1) dù n chẵn hay lẻ đều dần tới S, theo định nghĩa thì chuỗi đan dấu (1) hội tụ.

Thí dụ:

1) Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots, \quad u_n = \frac{1}{n^2}$$

là đơn điệu giảm và dần tới đến không khi $n \to \infty$, vậy chuỗi là hội tụ. Ta biết chuỗi trị số tuyệt đối của nó $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ cũng hội tụ (chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 1$)).

Vậy chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối.

2) Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n} + \ldots$$

gọi là chuỗi đan điều hòa. Ở đây $u_n = \dfrac{1}{n}$ đơn điệu giảm và dần tới 0 khi $n \to \infty$, do đó chuỗi hội tụ, mặt khác ta biết chuỗi trị số tuyệt đối của nó là chuỗi điều hòa phân kỳ: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Vậy theo định nghĩa chuỗi đan điều hòa là chuỗi bán hội tụ.

Chú ý: Định lý 1 chỉ là điều kiện đủ của sự hội tụ vì khi chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ phân kỳ thì không kết luận được chuỗi có dấu tùy ý $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ có hội tụ hay không.

Thí dụ 2) ở trên cho ta thấy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}.\frac{1}{n}$ vẫn hội tụ.

Nếu dùng tiêu chuẩn D'Lembert hoặc Cauchy xét $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ mà chuỗi này phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kỳ.

Định lý 3: ***Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ (1) hội tụ tuyệt đối và có tổng là S thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ (2) có được bằng cách thay đổi bất kỳ thứ tự các số hạng của chuỗi (1) cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng bằng S.***

Chứng minh:

Theo giả thiết thì chuỗi dương:

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$$

hội tụ, theo chú ý sau §2 chuỗi $|V_1|+|V_2|+\ldots+|V_n|\ldots$ cũng hội tụ. Do đó chuỗi (2) là hội tụ tuyết đối. Bây giờ xét hai chuỗi phụ:

$$\frac{|u_1|+u_1}{2}+\frac{|u_2|+u_2}{2}+\ldots+\frac{|u_n|+u_n}{2}+\ldots \qquad (3)$$

$$\frac{|u_1|-u_1}{2}+\frac{|u_2|-u_2}{2}+\ldots+\frac{|u_n|-u_n}{2}+\ldots \qquad (4)$$

Các chuỗi này là các chuỗi dương.

Rõ ràng các chuỗi này hội tụ vì:

$$\frac{|u_n|+u_n}{2}\le|u_n|,\quad \frac{|u_n|-u_n}{2}\le|u_n|$$

mà theo giả thiết: $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ.

Gọi tổng của chúng lần lượt là S_1 và S_2 thì $S = S_1 - S_2$ thay đổi thứ tự trong chuỗi (1) cũng là thay đổi thứ tự trong (3) và (4), và ta có chuỗi (2). Theo chú ý sau §2, sau khi thay đổi thứ tự các số hạng, chúng vẫn hội tụ và có tổng là S_1, S_2 và do đó $S_1 - S_2 = S$ là tổng của chuỗi (2).

Chú ý:

1) Đối với chuỗi hội tụ không tuyệt đối (bán hội tụ) Riemann đã chứng minh được định lý.

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ không tuyệt đối thì cho một số l, luôn luôn có thể tìm được một cách thay đổi thứ tự các số hạng của chuỗi để nó hội tụ về l.

Thí dụ:

Như đã biết chuỗi đan điều hòa: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ là hội tụ không tuyệt đối, giả sử tổng của nó là S: $S = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ (1) nhân hai vế đẳng thức này với $\frac{1}{2}$ ta có:

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\ldots \qquad (2)$$

cộng (1) và (2) ta có:

$$\frac{3S}{2}=(1+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})+\frac{1}{3}+(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4})+\frac{1}{5}+(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6})+\ldots$$

$$=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\ldots \qquad (3)$$

Chuỗi (3) chính là chuỗi (1) do cách sắp xếp thứ tự các số hạng một cách khác, nó hội tụ đến $\frac{3S}{2}$, trong đó chuỗi (1) là hội tụ tới S.

*2) Ta đã có các tính chất về tổng và nhân với số của các chuỗi, đó cũng là các phép tính tuyến tính đối với các chuỗi. Bây giờ ta định nghĩa phép nhân các chuỗi như sau:

Cho hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1), $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (2) chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ (3) gọi là tích của các chuỗi (1) và (2) trong đó $w_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1$.

Định nghĩa này suy rộng phép tính tích của 2 đa thức:

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)(v_1 + v_2 + \ldots + v_n).$$

Đối với tích (3) ta có:

Định lý:

- Nếu các chuỗi (1) (2) lần lượt hội tụ về các số S_1 và S_2 và một trong chúng là hội tụ tuyệt đối thì chuỗi (3) hội tụ về $S_1 S_2$. Nếu cả hai chuỗi (1), (2) đều hội tụ tuyệt đối thì chuỗi (3) cũng là hội tụ tuyệt đối.

Thí dụ: Xét hai chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}, \quad a, b \in R$$

hai chuỗi này hội tụ tuyệt đối.

Xét chuỗi tích:

$$1 + \left(\frac{a}{1!} + \frac{b}{1!}\right) + \left(1.\frac{b^2}{2!} + \frac{a}{1!}.\frac{b}{1!} + \frac{a^2}{2!}.1\right) + \ldots$$

hay

$$1 + \frac{a+b}{1!} + \frac{(a+b)^2}{2!} + \ldots + \frac{(a+b)^n}{n!} + \ldots$$

Theo định lý trên, chuỗi này cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng là tích của các tổng của các chuỗi đã cho.

B. CHUỖI HÀM

§1. CHUỖI HÀM TỔNG QUÁT

1.1. Định nghĩa

Cho một dãy vô hạn các hàm số: $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... $u_n(x)$ ... trong một miền X nào đó. Ta gọi biểu thức: $u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$ là một chuỗi hàm số.

Ký hiệu: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $u_n(x)$ gọi là số hạng tổng quát hay số hạng thứ n của chuỗi. Ta thấy tại mỗi điểm $x \in X$ xác định thì chuỗi hàm trở thành chuỗi số, do đó mọi lý luận của chuỗi số đều đúng với chuỗi hàm khi xét tại một điểm xác định. ***Nếu tại điểm $x \in X$ mà chuỗi hàm hội tụ hoặc phân kỳ thì x gọi là điểm hội tụ hay phân kỳ của chuỗi hàm. Tập hợp các điểm hội tụ hay phân kỳ của chuỗi hàm gọi là miền hội tụ hay phân kỳ của nó. Đặc biệt: Nếu $\forall x \in (a, b)$ chuỗi hàm hội tụ hoặc phân kỳ thì khoảng đó gọi là khoảng hội tụ hay phân kỳ của nó. Tổng của n số hạng đầu tiên của chuỗi hàm cũng gọi là tổng riêng thứ n của nó, rõ ràng tổng này là một hàm số của x trong X, ký hiệu:***

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x)$$

Giới hạn $\lim_{n \to \infty} S_n(x)$ trong miền hội tụ gọi là tổng của chuỗi hàm trong miền hội tụ của nó, **rõ ràng tổng này cũng là một hàm số của x, ký hiệu là:**

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x).$$ **Lúc đó, ta cũng viết:**

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

và ta cũng gọi chuỗi hàm là hội tụ về hàm $S(x)$.

Thí dụ:

Xét chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$. Đây là chuỗi nhân, công bội $q = x$ chỉ hội tụ khi $|x| < 1$ hay $-1 < x < 1$, do đó miền hội tụ của chuỗi là khoảng (-1 , 1) và lúc đó tổng của nó là: $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$ nghĩa là trong khoảng đó ta viết được:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Ta cũng biết, chuỗi này phân kỳ khi $|x| \geq 1$ hay $-\infty < x \leq -1$, và $1 \leq x < +\infty$. Do đó miền phân kỳ của nó gồm hai khoảng $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$.

1.2. Sự hội tụ đều

Cho chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

ta có: $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$.

Đặt $R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$ và gọi $R_n(x)$ là số hạng dư của chuỗi.

Do đó nếu $S(x)$ là tổng của chuỗi hàm thì trong miền hội tụ ta có: $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$.

Từ đẳng thức này ta thấy chuỗi hội tụ tại $x \in X$, nếu

$$\lim_{n \to \infty} (S(x) - S_n(x)) = 0 \text{ hay } \lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$$

Nghĩa là: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 \to |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$

hay $\quad |R_n(x)| < \varepsilon \qquad (1).$

Nói chung ta thấy tại các điểm hội tụ x khác nhau trong miền hội tụ X, (1) sẽ đạt tại những n_0 khác nhau, nghĩa là n_0 không những phụ thuộc vào ε mà còn phụ thuộc vào $x \in X$, đặc biệt nếu n_0 chỉ phụ thuộc ε, $n_0 = n_0(\varepsilon)$ (không phụ thuộc $x \in X$) ta có:

a) Định nghĩa: ***Chuỗi hàm (1) gọi là chuỗi hội tụ đều về hàm S(x) trong miền X, nếu:***

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon)$, $\forall n > n_0$, $\forall x \in X \Rightarrow |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ hay $|R_n(x)| < \varepsilon$.

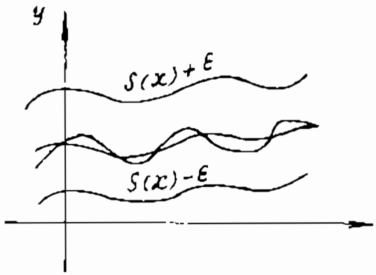
lúc đó X gọi là miền hội tụ đều của chuỗi.

Từ $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$

suy ra:

$S(x) - \varepsilon < S_n(x) < S_n(x) + \varepsilon$.

Về hình học nghĩa là từ $n > n_0$ các đường cong $S_n(x)$ ở giữa các đường cong $S(x) - \varepsilon$ và $S(x) + \varepsilon$ và với n khá lớn có thể coi đường cong $S_n(x)$ là đường cong gần đúng của đường cong $S(x)$ trong miền hội tụ X (H.196)



Hình 196

Thí dụ:

1) Xét chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$. Rõ ràng chuỗi này hội tụ $\forall x \in [0, 1]$.

Ta có:

$$R_n(x) = (-1)^n\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} + \ldots\right]$$

Theo định lý Leibniz (§3) thì $|R_n(x)| < \dfrac{x^{n+1}}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ (vì $0 \le x \le 1$).

Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, do đó $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$, $\forall n > n_0$, $|R_n(x)| < \varepsilon$.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ đều trong [0, 1].

2) Xét chuỗi

$$x + (x^2 - x) + \ldots + (x^n - x^{n-1}) + \ldots, \quad 0 \le x \le 1.$$

Ta có: $\quad S_n(x) = x + (x^2 - x) + (x^3 - x^4) + \ldots + (x^n - x^{n-1}) = x^n$.

Nếu $0 \le x < 1$ thì $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$. Nếu $x = 1$ thì $S_n(1)=1$, do đó $S(1) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 1$ như vậy chuỗi hội tụ $\forall x \in [0, 1]$ và

$$S(x) = \begin{cases} 0: & \text{nếu } 0 \le x < 1 \\ 1: & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$$

Bây giờ, $\forall \varepsilon > 0$ xét $|S(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| < \varepsilon$ (1) tại $x = 0$ và $x = 1$ thì (1) thỏa mãn với mọi n vì $R_n(0) = R_n(1) = 0$. Vậy chỉ còn xét $0 < x < 1$.

$$|R_n(x)| = |0 - x^n| = x^n < \varepsilon \quad \text{hay} \quad n\lg x < \lg\varepsilon$$

hay
$$n > \frac{\lg\varepsilon}{\lg x} \qquad (0 < x < 1,\ \lg x < 0).$$

Lấy $n_0 = E(\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg x})$ thì n_0 phụ thuộc ε và x.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ trong $[0, 1]$ nhưng không hội tụ đều trên đoạn đó, ta cũng nói nó hội tụ không đều trên đoạn đó.

Chú ý:

Từ định nghĩa suy ra: ***Điều kiện cần và đủ để chuỗi hàm (1) hội tụ đều về hàm $S(x)$ trong miền X là:***

$$\lim_{n\to\infty} (\sup_{x\in X} |R_n(x)|) = 0, \quad (R_n(x) = S(x) - S_n(x))$$

Thực vậy, giả sử chuỗi (1) hội tụ đều đến $S(x)$ trong X, nghĩa là

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon), \forall n > n_0, \forall x \in X \rightarrow |R_n(x)| < \varepsilon.$$

suy ra $\sup\limits_{x\in X} |R_n(x)| \le \varepsilon$, ngược lại, giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} (\sup\limits_{x\in X} |R_n(x)|) = 0$

Khi đó

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon), \forall n > n_0 \rightarrow \sup_{x\in X} |R_n(x)| < \varepsilon.$$

suy ra $|R_n(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X$, chứng tỏ chuỗi (1) hội tụ đều đến $S(x)$.

b) Tiêu chuẩn hội tụ đều

1) Tiêu chuẩn Cauchy

Điều kiện cần và đủ để chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ***(1) hội tụ đều đến hàm*** $S(x)$ ***trong miền*** X ***là:***

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0, \forall p \in N \Rightarrow |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

hay:

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \qquad (2)$$

Chứng minh:

Điều kiện cần: Giả sử (1) hội tụ đều đến $S(x)$ trong miền X thì theo định nghĩa:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in X.$$

và $$|S_{n+p}(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Do đó:

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \le |S_{n+p}(x) - S(x)| + |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

hay

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

nghĩa là ta có (2):

Điều kiện đủ: Giả sử điều kiện (2) thỏa mãn xét x cố định thuộc X thì điều kiện (2) chứng tỏ dãy $S_n(x)$ là một dãy cơ bản do đó nó dần tới một giới hạn $S(x)$ nào đó. Bây giờ cố định n và x thì từ (2) ta có: $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ (3). Vì x cố định tùy ý thuộc X, nên bất đẳng thức (3) đúng $\forall x \in X$ nghĩa là chuỗi (1) hội tụ đều tới $S(x)$ trong miền X.

Thí dụ:

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ trên $[0, 2\pi]$. Dùng tiêu chuẩn Cauchy, lấy $\varepsilon = 0,1$ và xét:

$$|S_{2n} - S_n(x)|\Big|_{x=\frac{1}{n}} = \left|\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \ldots + \frac{\sin 2nx}{2n}\right|_{x=\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{\sin(1+\frac{1}{n})}{n+1} + \frac{\sin(1+\frac{2}{n})}{n+2} + \ldots + \frac{\sin 2}{2n} \geq \frac{\sin 1}{2} > \varepsilon$$

$\forall n \in N$, do đó chuỗi đã cho không hội tụ đều $[0, 2\pi]$.

2) Tiêu chuẩn Weierstrass

Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (1).

Nếu $\exists M_n > 0$, $\forall n \in N$, $\forall x \in X$, $|u_n(x)| \leq M_n$ (2) và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ hội tụ (3) thì chuỗi (1) hội tụ đều trong miền X. Chuỗi (3) gọi là chuỗi trội hay chuỗi già của (1).

Chứng minh:

Xét:

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \ldots + |u_{n+p}(x)|$$

$$\leq M_{n+1} + M_{n+2} + \ldots + M_{n+p}, \forall x \in X \text{ (theo (3))}.$$

Mặt khác theo giả thiết, chuỗi số (3) hội tụ nên theo điều kiện Cauchy (1.2)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, \forall p \Rightarrow |M_{n+1} + M_{n+2} + \ldots + M_{n+p}| < \varepsilon$$

Vậy

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon, \forall x \in X.$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy chuỗi (1) hội tụ đều trong X.

Thí dụ:

Xét các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\alpha}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$, $(\alpha > 0)$

chuỗi trội của các chuỗi này là: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$,

(vì $\left|\frac{\cos nx}{n^{\alpha}}\right| \le \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\left|\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\right| \le \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\forall x \in R$)

Ta biết chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ khi $\alpha > 1$, vậy theo tiêu chuẩn Weierstrass các chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối và đều trong R khi $\alpha > 1$.

Trường hợp $0 < \alpha \le 1$ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ phân kỳ, ta không thể kết luận.

*Để giải quyết trường hợp này ta có thể dùng tiêu chuẩn sau đây (suy từ tiêu chuẩn Cauchy).

3) Tiêu chuẩn Dirichlet

Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ (1), trong đó $u_n(x) = v_n(x).w_n(x)$.

Nếu

$$\exists c > 0,\ |S_n(x)| = |v_1(x) + v_2(x) + \ldots + v_n(x)| \le c,\ (\forall x \in X,\ \forall n \in N)$$

và dãy hàm $w_n(x)$ là đơn điệu không tăng và dần đến 0, $\forall x \in X$ thì chuỗi (1) hội tụ đều trong X.

Thí dụ:

Xét các chuỗi ở thí dụ trước với $0 < \alpha \le 1$. Áp dụng tiêu chuẩn Dirichlet, với $v_n(x) = \sin nx$, $w_n(x) = \frac{1}{n^{\alpha}}$ $(0 < \alpha \le 1)$ rõ ràng $w(x)$ là đơn điệu không tăng và dần tới 0, $\forall x \in R$, đặc biệt

$$\forall x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon],\ 0 < \varepsilon < \pi.$$

Mặt khác:

$$|\delta_n(x)| = |\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx|$$

$$= \left|\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}} \quad (\forall n \in N)$$

nghĩa là $S_n(x)$ bị chặn $\forall x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$. Vậy theo tiêu chuẩn Dirichlet, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ là hội tụ đều trong $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ đặc biệt là trong $(0, 2\pi)$, $(\varepsilon \to 0)$. Rõ ràng tại $x = 0$ và $x = 2\pi$ chuỗi đã cho cũng hội tụ.

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$, $0 < \alpha \leq 1$ là chuỗi hội tụ trong $[0, 2\pi]$, nhưng như đã biết ở thí dụ phần 1), với $\alpha = 1$ chuỗi hội tụ không đều trong $[0, 2\pi]$.

1.3. Tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều

Các chuỗi hội tụ đều có các tính chất quan trọng sau đây mà các chuỗi hội tụ không đều, không có.

Định lý 1:

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (1) có các số hạng $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ là các hàm liên tục trên $[a, b]$ và chuỗi hội tụ đều trên $[a, b]$ về hàm $S(x)$ thì $S(x)$ là một hàm liên tục trên $[a, b]$.

Chứng minh:

Theo giả thiết chuỗi (1) hội tụ đều về $S(x)$ trong $[a, b]$ nghĩa là:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, \forall x \in [a, b] \to |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

cho $p > n_0$ thì $|S(x) - S_p(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ và đặc biệt $|S(x_0) - S_p(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $(x_0 \in [a, b])$. Xét

$$|S(x) - S(x_0)| \le |S(x) - S_p(x)| + |S_p(x) - S_p(x_0)| + |S_p(x_0) - S(x_0)|$$

Theo giả thiết: $S_p(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_p(x)$ là liên tục tại x_0 (vì $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_p(x)$ là liên tục trong $[a, b]$) do đó $\exists\delta > 0$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$ $|S_p(x) - S_p(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Vậy $|x - x_0| < \delta$, ta có:

$$|S(x) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

nghĩa là $S(x)$ là liên tục tại x_0 và vì x_0 là điểm bất kỳ trên $[a, b]$ nên $S(x)$ là liên tục trên $[a, b]$.

Thí dụ:

1) Ta biết chuỗi $x + (x^2 - x) + \ldots + (x^n - x^{n-1}) + \ldots$ là hội tụ $\forall x \in [0, 1]$ về hàm:

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$$

(thí dụ 2) 1.2)

Nhưng chuỗi không hội tụ đều trên $[0, 1]$, ta thấy tổng $S(x)$ của chuỗi là một hàm gián đoạn trên $[0, 1]$.

2) Ta biết chuỗi $\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots$ theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi này hội tụ đều $\forall x \in R$ vì chuỗi trội của nó là $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ ($\alpha = 2 > 1$).

Các số hạng của chuỗi là các hàm liên tục $\forall x \in R$. Vậy theo định lý 1, tổng $S(x)$ của nó là 1 hàm liên tục $\forall x \in R$.

Định lý 2: ***Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (1) có các số hạng $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) là các hàm liên tục trên $[a, b]$ và hội tụ đều về hàm $S(x)$ trên $[a, b]$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt$ hội tụ đều về hàm $\int_{x_0}^{x} S(t)dt$ ($x, x_0 \in [a, b]$) nghĩa là:***

$$\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_n(t)dt \qquad (2)$$

Đặc biệt

$$\int_{a}^{b} S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{a}^{b} u_n(t)dt.$$

Nói cách khác, với các giả thiết của định lý, tích phân của một tổng vô hạn bằng tổng vô hạn các tích phân của từng số hạng (điều này đã mở rộng tính chất của một tổng hữu hạn trong tích phân xác định).

Chứng minh:

Theo giả thiết và theo định lý 1 thì S(x) là một hàm liên tục trên [a, b] do đó $\int_{x_0}^{x} S(t)dt$ tồn tại $\forall x_0$, $x \in [a, b]$.

Cũng theo giả thiết, chuỗi (1) hội tụ đều về $S(x)$ trên $[a, b]$ nghĩa là:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 \to |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b].$$

do đó:

$$\left|\int_{x_0}^{x} S_n(t)dt - \int_{x_0}^{x} S(t)dt\right| \le \int_{x_0}^{x} |S_n(t) - S(t)|\, dt$$

$$\le \int_{a}^{b} |S_n(t) - S(t)|\, dt \le \int_{a}^{b} \varepsilon\, dt = \varepsilon\,(b - a), \quad \forall x \in [a, b].$$

nghĩa là chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_n(t)dt$ hội tụ đều về hàm $\int_{x_0}^{x} S(t)dt$ và ta có đẳng thức (2).

Thí dụ:

Xét chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Như đã biết (1.1) chuỗi này hội tụ $\forall x \in (-1,1)$ và tổng của nó là $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

Rõ ràng chuỗi này cũng hội tụ đều trên (-1,1) (theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi trội của nó là $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ với $|x| \le |q| < 1$ hội tụ) các số hạng của chuỗi $u_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2,...$ là các hàm liên tục $\forall x \in R$ đặc biệt liên tục trên (1, 1) Vậy theo định lý 2, trên (-1,1)ta có:

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x} = \int_0^x 1dx + ... + \int_0^x x^n dx + ...$$

(với 0; x $\in [a, b]$, - 1 < a < b < 1)

hay

$$-\ln|1 \quad x| = x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^{n+1}}{n+1} + ...$$

và chuỗi ở vế phải hội tụ đều về $-\ln|1-x|$ với $|x| < 1$.

Định lý 3:

Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (1) Nếu:

1) $u_n(x)$ ($n = 1, 2, ...$) có các đạo hàm liên tục trên [a, b].

2) Chuỗi (1) hội tụ về S(x) trên [a, b].

3) Chuỗi các đạo hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ hội tụ đều về $\sigma(x)$ trên [a, b] thì chuỗi (1) hội tụ đều trên [a, b] và tổng S(x) của nó có đạo hàm trên [a, b] và

$$S'(x) = \sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \quad (2)$$

nghĩa là có thể đạo hàm từng số hạng của chuỗi (1).

Chứng minh:

Theo giả thiết và định lý 1 thì $\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ và $\sigma(x)$ là liên tục trên $[a, b]$.

Theo giả thiết 3), áp dụng định lý 2 ta có:

$$\int_{x_0}^{x} \sigma(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n'(x)dx, \ x_0, x \in [a, b].$$

hay

$$\int_{x_0}^{x} \sigma(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(x_0)] \qquad (3)$$

trong đó, vế phải là hội tụ đều về $\int_{x_0}^{x} \sigma(x)dx$. Theo giả thiết 2), chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ là hội tụ, do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ là hội tụ đều trên $[a, b]$ và (3) tương đương với đẳng thức $S(x) = S(x_0) + \int_{x_0}^{x} \sigma(x)dx$. Do đó $S(x)$ có đạo hàm $S' = \sigma(x)$.

Thí dụ:

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\alpha}}$ (1) và chuỗi các đạo hàm của các số hạng của nó:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin nx}{n^{\alpha-1}} \qquad (2)$$

Ta biết (thí dụ ở 1.2) chuỗi (1) là hội tụ đều với $\alpha > 1$ và chuỗi (2) hội tụ đều với $\alpha > 2$ trên toàn trục số. Do đó theo định lý 3 khi $\alpha > 2$ ta có $S'(x) = \sigma(x)$.

Trong đó $S(x)$, $\sigma(x)$ lần lượt là tổng của (1), (2).

*1.4. Dãy hàm

Xét dãy hàm $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ (1) trong đó $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) xác định trong miền X nào đó.

Xét chuỗi:

$$f_1(x) + \{f_2(x) - f_1(x)\} + \ldots + \{f_n(x) - f_{n-1}(x)\} + \ldots \qquad (2)$$

trong X.

Tổng riêng của chuỗi này là $S_n(x) = f_n(x)$.

Định nghĩa:

Dãy hàm (1) gọi là hội tụ tại $x \in X$ về $f(x)$ hay có giới hạn là $f(x)$ khi $n \to \infty$ $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ nếu chuỗi hàm (2) hội tụ tại điểm $x \in X$ về $f(x)$.

Dãy hàm (1) gọi là hội tụ đều về hàm $f(x)$ trong miền X nếu chuỗi hàm (2) hội tụ đều về $f(x)$ trong miền X.

Từ định nghĩa ta suy được ngay các tiêu chuẩn hội tụ đều và các tính chất của dãy hàm hội tụ đều như của chuỗi hàm bằng cách thay đổi ngôn ngữ cho thích hợp chẳng hạn:

Tiêu chuẩn Cauchy:

Dãy hàm $f_n(x)$, ($n = 1, 2, \ldots$) xác định trong miền X là hội tụ đều trong miền này khi và chỉ khi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0, \forall m > n_0, \forall x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Tính chất:

a) Nếu dãy hàm liên tục $f_n(x)$, ($n = 1, 2, \ldots$) hội tụ đều về hàm $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ thì :

1) $f(x)$ là một hàm liên tục trên $[a, b]$.

2) $\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt$ ***hội tụ đều về*** $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ ***trên [a, b] hay***

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt = \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt .$$

(nghĩa là có thể chuyển qua giới hạn dưới dấu tích phân).

b) Nếu dãy hàm khả vi liên tục (có đạo hàm liên tục). $f_n(x)$, ***(n= 1, 2,...) hội tụ về hàm f(x) trên [a, b], còn dãy*** $f_n'(x)$ ***(n = 1, 2, ...) hội tụ đều về hàm*** $\varphi(x)$ ***trên [a, b] thì hàm f(x) cũng khả vi trên [a, b] và*** $f'(x) = \varphi(x)$ ***hay***

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) .$$

(nghĩa là có thể chuyển qua giới hạn dưới dấu đạo hàm).

Chú ý:

Điều kiện hội tụ đều trong các mệnh đề trên đối với chuỗi hàm và dãy hàm chỉ là điều kiện đủ để có các kết luận.

Thực vậy, xét hàm $f_n(x) = nxe^{-nx}$, $(n = 1, 2, ..)$ ta có:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{e^{nx}} = 0 , \quad \forall x \in [0, 1].$$

hơn nữa:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 nxe^{-nx}dx = \lim_{n\to\infty} n[(\frac{-xe^{-nx}}{n})\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{n}dx]$$

$$\lim_{n\to\infty}(-e^{-n} - \frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n}) = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0$$

nghĩa là có thể chuyển qua giới hạn dưới dấu tích phân, Tuy nhiên:

$$\sup_{x\in[0,1]} |R_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} (nxe^{-nx}) = nxe^{-nx}\Big|_{x=\frac{1}{n}} = \frac{1}{e}$$

không dần đến 0, theo chú ý sau mục (1.1), dãy hàm đã cho không hội tụ đều đến $f(x) = 0$ trên [0, 1].

Mặc dầu điều kiện hội tụ đều chỉ là điều kiện đủ theo chứng minh trên nhưng điều kiện đó cũng cho thấy sự hạn chế của tích phân Riemann.

Trong thực tế cần đòi hỏi các điều kiện rộng rãi hơn, và người ta đã mở rộng nghiên cứu các loại tích phân khác (chẳng hạn tích phân Lebesgue).

§2. CHUỖI LŨY THỪA

Trong § này ta sẽ xét một loại chuỗi hàm đặc biệt nhưng rất quan trọng trong lý luận cũng như trong áp dụng gọi là chuỗi lũy thừa.

2.1. Định nghĩa

Chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm có dạng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \tag{1}$$

hay tổng quát hơn:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \tag{1'}$$

Trong đó a_0, a_1, a_2, ... , a_n... là hằng số gọi là các hệ số của chuỗi lũy thừa.

Như vậy chuỗi lũy thừa là chuỗi mà các số hạng của nó là các hàm số lũy thừa.

Không kém phần tổng quát ta chỉ xét chuỗi lũy thừa dạng (1) vì dạng (1') có thể đưa về dạng (1) bằng cách đặt $x - x_0 = X$.

Thí dụ:

1) $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

là chuỗi lũy thừa có mọi hệ số đều bằng 1.

2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

là chuỗi lũy thừa có hệ số:

$$a_n = \frac{1}{n!},\ n = 1, 2, \dots$$

2.2. Miền hội tụ

Rõ ràng mọi chuỗi lũy thừa dạng (1) đều hội tụ tại điểm $x = 0$, xét $x \neq 0$ ta có:

a) Định lý Abel: ***Nếu chuỗi lũy thừa (1) hội tụ tại điểm $x_0 \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối $\forall x$: $|x| < |x_0|$.***

Chứng minh:

Giả sử chuỗi lũy thừa (1) hội tụ tại điểm $x_0 \neq 0$ khi đó theo điều kiện cần của sự hội tụ của chuỗi số: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n x_0^n = 0$. Theo tính chất của giới hạn thì $a_n\, x_0^n$ bị chặn khi $n \to \infty$, nghĩa là $\exists M > 0, \forall n$: $|a_n x_0^n| \leq M$, xét $|x| < |x_0|$ và:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n\right| = |a_0| + |a_1 x| + \dots + |a_n x^n| + \dots \qquad (2)$$

vì

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n|\,\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \qquad (x_0 \neq 0)$$

nên chuỗi (2) có các số hạng không lớn hơn các số hạng tương ứng của chuỗi:

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$$

Đây là một chuỗi nhân hội tụ vì có công bội $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ (theo giả thiết), theo tiêu chuẩn so sánh thì chuỗi (2) hội tụ suy ra chuỗi (1) hội tụ tuyệt đối $\forall x$: $|x| < |x_0|$.

Hệ quả:

Nếu chuỗi lũy thừa (1) phân kỳ tại x_1 thì nó phân kỳ $\forall x$: $|x| > |x_1|$

Thực vậy, giả sử chuỗi (1) hội tụ tại x mà $|x| > |x_1|$ thì theo định lý Abel nó hội tụ tuyệt đối tại x_1, trái với giả thiết.

b) Bán kính hội tụ

Trước hết ta có nhận xét: có những chuỗi lũy thừa chỉ hội tụ tại điểm duy nhất $x = 0$, nhưng cũng có những chuỗi lũy thừa hội tụ $\forall x \in R$.

Chẳng hạn chuỗi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n = 1 + x + 2!x^2 + \ldots + n!x^n + \ldots$$

Tại $x = 0$, tổng của chuỗi $S = 1$, do đó chuỗi hội tụ $x = 0$,

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = (n+1)|x| \to \infty$ khi $n \to \infty$, do đó chuỗi phần kỳ $\forall x \neq 0$.

Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hội tụ $\forall x \in R$ vì $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0$ khi $n \to \infty$, $\forall x \in R$.

Ngoài hai trường hợp trên, để tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa, ta có:

Định lý 1: ***Tồn tại một số duy nhất: $R \in R$, $0 < R < +\infty$ sao cho chuỗi lũy thừa (1) hội tụ khi $-R < x < R$ và phân kỳ khi $-\infty < x < -R$, $R < x < +\infty$.***

Chứng minh:

Xét tập hợp các điểm hội tụ $x_0 \neq 0$ của chuỗi lũy thừa (1) và tập hợp $A = \{ |x_0| \}$.

Rõ ràng A là một tập hợp bị chặn trên, vì nếu ngược lại A không bị chặn trên thì $\forall x \in R$, luôn luôn có thể tìm được x_0 để $|x| < |x_0|$, theo định lý Abel, chuỗi lũy thừa hội tụ $\forall x \in R$, đây là một trường hợp mà ta đã xét ở trên (ta đã trừ ra).

Theo nguyên lý supremun thì tồn tại duy nhất số $R = \sup A$, $R > 0$ vì A chỉ gồm những phần tử dương. nếu $|x| > R$ thì rõ ràng chuỗi (1) phân kỳ (vì nếu chuỗi hội tụ tại x: $|x| > R \geq |x_0|$ thì $R \neq \sup A$. Nếu $|x| < R$, thì theo định nghĩa của sup: $\exists |x_0| \subset A$: $|x| < |x_0| \leq R$. Vậy theo định lý Abel chuỗi (1) hội tụ $\forall x$: $|x| < R$.

Vậy chuỗi (1) hội tụ tuyệt đối trong khoảng $(-R, R)$ và phân kỳ trong 2 khoảng $(-\infty, -R)$, $(R, +\infty)$.

Quy ước $R = +\infty$, và $R = 0$ khi chuỗi hội tụ $\forall x \in R$ và chuỗi chỉ hội tụ tại $x = 0$.

Định nghĩa:

Số R: $0 \leq R \leq +\infty$ (tồn tại trong định lý và quy ước) gọi là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa.

Theo trên thì tại $x = \pm R$ $(0 < R < +\infty)$ ta chưa khẳng định chuỗi có hội tụ hay không

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa (1) là khoảng $(-R, R)$. Thêm hai đầu mút $x = \pm R$, nếu chuỗi cũng hội tụ tại các đầu mút đó; $(-R, R)$ cũng gọi là khoảng hội tụ của chuỗi.

Để tìm bán kính hội tụ R của chuỗi lũy thừa (1) theo các hệ số ta có:

Định lý 2:

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ *(* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l$*) (l: hữu hạn hoặc vô hạn) thì bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa (1) được xác định theo công thức:*

$$R = \frac{1}{l} \quad (l = +\infty \text{ thì } R = 0,\ l = 0 \text{ thì } R = +\infty)$$

Chứng minh:

Xét chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ (2) với x = const, ta có chuỗi số dương. Áp dụng tiêu chuẩn D'Alambert, ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.|x| = l|x|$$

$(u_n = |a_n x^n|)$

Nếu $0 < l < +\infty$ thì chuỗi (2) hội tụ khi $l|x| < 1$ hay $-\dfrac{1}{l} < x < \dfrac{1}{l}$, do đó chuỗi (1) hội tụ tuyệt đối trong khoảng $(-\dfrac{1}{l}, \dfrac{1}{l})$.

Nếu $l|x| > 1$ hay $x < -\dfrac{1}{l}$ hoặc $x > \dfrac{1}{l}$ thì chuỗi (2) phân kỳ, vì khi đó $u_n = |a_n x^n|$ không dần tới không (theo chứng minh của tiêu chuẩn D'Alambert) do đó $a_n x^n$ cũng không dần tới không, nghĩa là chuỗi (1) phân kỳ.

Nếu $l = +\infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$, $\forall x \neq 0$, do đó $u_{n+1} > M$, $u_n \to +\infty$ và $a_n x^n \to \infty$, $\forall x \neq 0$, do đó chuỗi (1) cũng phân kỳ $\forall x \neq 0$.

Nếu $l = 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$, theo tiêu chuẩn D'Alambert, chuỗi (2) hội tụ $\forall x \in R$, do đó chuỗi (1) hội tụ tuyệt đối $\forall x \in R$.

Tóm lại, theo định nghĩa bán kính hội tụ thì $R = \frac{1}{l}$. ($l = +\infty$ thì $R = 0$, $l = 0$ thì $R = +\infty$).

Chứng minh tương tự cho trường hợp $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$.

Chú ý:

Theo định nghĩa ta có thể viết:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{hoặc } R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn hoặc bằng ∞.

Thí dụ:

1) Xét chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

Ở đây

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{1}\right) = 1$$

Vậy bán kính hội tụ của chuỗi là: $R = 1$, miền hội tụ tuyệt đối là khoảng (-1, 1) miền phân kỳ là hai khoảng $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$.

Bây giờ xét tại: $x = \pm 1$.

Tại $x = 1$, ta có chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$$

Đó là chuỗi đan điều hòa bán hội tụ.

Tại $x = -1$, ta có chuỗi:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{n+1}=-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\quad)$$

Đó là chuỗi điều hòa phân kỳ. Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là khoảng (-1, 1].

Như vậy miền hội tụ và hội tụ tuyệt đối của chuỗi là trùng nhau trừ tại $x = \pm 1$.

2) Xét chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

ở đây

$$a_n=\frac{1}{n!},\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{1})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}=0$$

Vậy $R = \infty$ tức là chuỗi hội tụ tuyệt đối $\forall x \in R$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$, $R = 0$: chuỗi chỉ hội tụ tại $x = 0$.

2.3. Miền hội tụ đều

Ở trên ta đã thấy miền hội tụ và hội tụ tuyệt đối của chuỗi lũy thừa, nói chung là trùng nhau trừ tại $x = \pm R$. Vậy miền hội tụ đều của nó thì thế nào ? Để trả lời ta có:

Định lý:

Miền hội tụ đều của chuỗi lũy thừa (1) là đoạn [-ρ, ρ] với 0 < ρ < R, nghĩa là miền hội tụ đều của chuỗi lũy thừa nằm lọt trong miền hội tụ của nó và cũng có trung điểm tại gốc O.

Chứng minh:

Lấy x_0 sao cho $\rho < x_0 < R$, lúc đó chuỗi số

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = |a_0| + |a_1 x_0| + |a_2 x_0^2| + \ldots + |a_n x_0^n| + \ldots$$

là chuỗi hội tụ, chuỗi này rõ ràng là chuỗi trội của chuỗi lũy thừa khi $|x| \le \rho$. Vậy theo điều kiện hội tụ đều (tiêu chuẩn Weierstrass) chuỗi lũy thừa là hội tụ đều khi $|x| \le \rho$, nghĩa là miền hội tụ đều của nó là đoạn $[-\rho, \rho]$ với $0 < \rho < R$.

Thí dụ:

1) Theo trên chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ có $R = 1$. Vậy miền hội tụ đều của nó là $[-\rho, \rho]$ với $0 < \rho < 1$.

2) Cũng theo trên chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hội tụ $\forall x$.

Vậy nó hội tụ đều trên mọi đoạn $[-\rho, \rho]$ $(0 < \rho < +\infty)$.

2.4. Tính chất

Vì chuỗi lũy thừa có các số hạng là những hàm số lũy thừa nên các số hạng này là các hàm số liên tục $\forall x \in R$, theo trên chuỗi lũy thừa có miền hội tụ đều là khoảng $[-\rho, \rho]$ với $0 < \rho < R$. R là bán kính hội tụ của nó.

Do đó và áp dụng các tính chất chuỗi hàm tổng quát, ta suy ra ngay các tính chất của chuỗi lũy thừa (1).

Định lý 1:

Nếu chuỗi lũy thừa (1) có bán kính hội tụ là R và $0 < \rho < R$ ($R \neq 0$) thì:

1) Tổng $S(x)$ của chuỗi là một hàm liên tục trên $[-\rho, \rho]$.

2) Chuỗi $\int_0^x S(x)dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$ có được bằng cách tích phân từng số hạng của (1) trên đoạn $[-\rho, \rho]$ cũng hội tụ đều trên đoạn đó.

3) Chuỗi $S'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$ có được bằng cách đạo hàm từng số hạng của (1) trên đoạn $[-\rho, \rho]$ cũng hội tụ đều trên đoạn đó.

Định lý 2: ***Nếu chuỗi lũy thừa (1) có khoảng hội tụ là $(-R, R)$ thì:***

1) Các chuỗi có được bằng cách tích phân hay đạo hàm từng số hạng của chuỗi (1) cũng có khoảng hội tụ là $(-R, R)$.

2) Tổng $S(x)$ của chuỗi (1) là một hàm liên tục trong khoảng hội tụ $(-R, R)$. Nếu chuỗi hội tụ tại một trong các đầu mút của khoảng thì $S(x)$ liên tục bên trái hoặc bên phải của đầu mút đó.

3) $$\int_{x_1}^{x_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_1}^{x_2} a_n x^n dx \text{ với } x_1, x_2 \in (-R, R)$$

4) $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'.$$

***Chứng minh:**

Ta chỉ chứng minh 1). Các phần sau chứng minh tương tự.

Thực vậy, xét điểm bất kỳ $x_1 \in (-R, R)$ thì $\exists\rho > 0$: $|x_1| < \rho < R$. Theo định lý, các chuỗi có được bằng cách đạo hàm hay tích phân từng số hạng của chuỗi (1) cũng có khoảng hội tụ đều là đoạn $[-\rho, \rho]$ do đó chúng hội tụ tại $x \in [-\rho, \rho]$ đặc biệt chúng hội tụ tại x_1, vậy nếu R_1 là bán kính hội tụ của các chuỗi này thì $R_1 \geq R$ (a).

Mặt khác, xét chuỗi đạo hàm của chuỗi (1):

$$a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots \tag{2}$$

thì chuỗi (1) là chuỗi tích phân từng số hạng của (2), do đó theo chứng minh trên thì $R \geq R_1$ (b). So sánh (a) và (b) ta có: $R_1 = R$.

Thí dụ:

Xét chuỗi $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$

và ta có:

$$S(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \text{ với } |x| < 1.$$

Tích phân từng số hạng của chuỗi này từ 0 đến x ta có:

$$\ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \text{ với } |x| < 1.$$

Đạo hàm từng số hạng của chuỗi đó ta có:

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - \ldots + (-1)^n n x^{n-1} + \ldots \text{ với } |x| < 1.$$

Chú ý:

Như đã nói chuỗi lũy thừa dạng tổng quát $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, đưa được về chuỗi lũy thừa dạng (1) bằng cách đặt $x - x_0 = t$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

Áp dụng các lý thuyết đã biết của chuỗi dạng (1) ta sẽ suy ra các kết quả của dạng tổng quát.

Thí dụ:

Tìm miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2}$ (a). Đặt $x + 1 = t$, ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^2}$ (b). Bán kính hội tụ của (b) là $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{(n+1)^2}} = 1$, do đó chuỗi (b) hội tụ khi $-1 < t < 1$ hay $-2 < x < 0$, nghĩa là khoảng hội tụ của (a) là (-2, 0). Tại $x = 0$, ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ (dạng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha = 2 > 1$).

Tại $x = -2$ ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ hội tụ tuyệt đối. Vậy miền hội tụ của chuỗi cũng là miền hội tụ tuyệt đối của nó đó là đoạn [- 2, 0].

§3. CHUỖI TAYLOR VÀ MACLAURIN

Ta đã xét vấn đề: Cho trước một chuỗi lũy thừa, xét sự hội tụ của nó về một hàm số nào đó trong một miền nào đó, bây giờ ta xét bài toán ngược lại, cho trước một hàm số $f(x)$, tìm điều kiện để hàm $f(x)$ là tổng của một chuỗi lũy thừa trong một miền nào đó. Điều này mở ra khả năng để tính gần đúng rất tốt vì đối với các hàm lũy thừa, tính toán chúng là đơn giản nhất.

3.1. Định nghĩa

Như đã biết: nếu $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp n tại x_0 và có đạo hàm cấp $n+1$ tại lân cận của x_0, thì trong lân cận đó ta có công thức Taylor cấp n:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \qquad \text{(T)}$$

Trong đó:

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \; c = x_0 + \theta(x-x_0),\; 0 < \theta < 1.$$

$R_n(x)$ là số hạng dư dưới dạng Lagrange của công thức Taylor cấp n, đặc biệt nếu $x_0 = 0$, ta có công thức Maclaurin cấp n.

Đặt : $$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad \text{(M)}$$

$P_n(x)$ gọi là đa thức Taylor cấp n của $f(x)$ trong lân cận của điểm x_0 khi đó công thức Taylor cấp n viết được dưới dạng:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Bây giờ giả sử $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp và đưa ra :

Định nghĩa: ***Chuỗi Taylor của hàm f(x) trong lân cận của điểm x_0 là chuỗi lũy thừa mà tổng riêng $S_n(x)$ của nó là đa thức Taylor cấp n: $P_n(x)$ của f(x) trong lân cận đó, nghĩa là chuỗi có dạng:***

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots + \dots \qquad (T).$$

Đặc biệt $x_0 = 0$ ta có chuỗi:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (M).$$

gọi là chuỗi Maclaurin của f(x).

Nếu chuỗi Taylor của hàm $f(x)$ hội tụ về $f(x)$ hay có tổng là $f(x)$ trong lân cận của điểm x_0 nghĩa là:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \qquad (1)$$

thì ta nói : f(x) khai triển được theo chuỗi Taylor (của nó) trong lân cận của điểm x_0.

Vậy với điều kiện nào thì $f(x)$ khai triển được theo chuỗi Taylor tại lân cận điểm x_0 hay có đẳng thức (1) trong lân cận của điểm x_0 ?

Trước hết: Rõ ràng nếu $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp tại lân cận điểm x_0 thì $f(x)$ có chuỗi Taylor tại lân cận đó.

Thí dụ:

Xét: $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{với } x \neq 0 \\ 0 & \text{với } x = 0 \end{cases}$

Đó là một hàm có đạo hàm mọi cấp $\forall x \in R$. Do đó ta có thể lập được chuỗi (M) của $f(x)$ tại lân cận điểm $x_0 = 0$, ta tính:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{\Delta x^2}}}{\Delta x} = 0$$

$$f''(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2e^{\frac{1}{\Delta x^2}}}{\Delta x^4} = 0, \ldots, f^{(n)} = 0 \ldots$$

Vậy chuỗi (M) của $f(x)$ (trong lân cận của $x_0 = 0$) là:

$$0 + 0x + \frac{0}{2!}x^2 + \ldots + \frac{0}{n!}x^n + \ldots$$

Chuỗi này hội tụ và có tổng bằng $S(x) = 0$, $\forall x \in R$.

Thí dụ này cho thấy điều kiện có đạo hàm mọi cấp của $f(x)$ không đủ để $f(x)$ khai triển được theo chuỗi Taylor trong lân cận điểm $x_0 = 0$ vì trong lân cận của $x_0 = 0$ ta có $S(x) \neq f(x)$.

Vậy phải thêm điều kiện nào để có đẳng thức (1) ?

3.2. Điều kiện f(x) khai triển được theo chuỗi Taylor

Định lý:

Giả sử hàm f(x) có đạo hàm mọi cấp trong lân cận của điểm x_0.

Điều kiện cần và đủ để f(x) khai triển được theo chuỗi Taylor trong lân cận đó là $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, $\forall x$ trong lân cận của x_0. $R_n(x)$ là số hạng dư của công thức Taylor của $f(x)$ cũng là số hạng dư của chuỗi.

Chứng minh:

Giả sử có đẳng thức (1) trong lân cận ε của x_0 nghĩa là:

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = \lim_{n \to \infty} P_n(x) = f(x) \text{ trong } \varepsilon.$$

Mặt khác $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$, do đó $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ trong lân cận ε. Ngược lại, giả sử $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ trong lân cận ε thì $\lim_{n\to\infty} |f(x) - S_n(x)| = 0$ hay $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$, trong lân cận ε nghĩa là ta có (1).

Hệ quả:

Nếu $\exists M > 0$, $|f^{(n)}(x)| \le M$ trong lân cận ε của x_0 thì ta có (1). Thực vậy, khi đó: trong lân cận ε:

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \qquad (2).$$

Mặt khác: Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \text{ hội tụ } \forall x \in R.$$

vì

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{1} = \infty.$$

Do đó số hạng tổng quát của chuỗi

$$\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Từ (2) suy ra $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ trong ε. Theo định nghĩa trên, ta có (1).

3.3. Các khai triển theo chuỗi Maclaurin của vài hàm sơ cấp

1) Hàm $f(x) = e^x$

Ta biết công thức Maclaurin của hàm e^x là:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$$

Mặt khác

$$f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} = e^x, \text{ nếu } |x| \le M \ (M > 0), \ \forall n$$

ta có $|f^{(n)}(x)| \le e^M = M'$.

Do đó theo hệ quả trên, e^x khai triển được theo chuỗi (M).

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ \ldots \quad \forall x \in \boldsymbol{R}.$$

vì M là tùy ý.

2) Hàm $f(x) = \sin x$

Ta biết công thức Maclaurin của hàm $f(x) = \sin x$ là:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x).$$

Ta cũng biết:

$$|f^{(n)}(x)| = |\sin(x + \frac{n\pi}{2})| \le 1, \ \forall n \in \boldsymbol{N}, \ \forall x \in \boldsymbol{R}.$$

Do đó theo hệ quả trên hàm $\sin x$ khai triển được theo chuỗi (M):

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad \forall x \in \boldsymbol{R}.$$

3) Hàm $f(x) = \cos x$

Tương tự như 2) ta có:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad \forall x \in \boldsymbol{R}.$$

4) Khai triển hàm $f(x) = (1 + x)^\alpha$. (chuỗi nhị thức).

Ta biết công thức (M) của $(1 + x)^\alpha$ là:

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \ldots \quad + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n + R_n(x).$$

Có thể chứng minh:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \ldots \quad |x| < 1$$

* Ta đã biết $R_n(x)$ dạng Lagrange. Bây giờ ta sẽ xét $R_n(x)$ dưới một dạng khác, ta có:

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Dễ dàng suy ra:

$$R_n(0) = 0, \; R_n'(0) = 0, \ldots R_n^{(n)}(0) = 0, R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) \qquad (1)$$

Mặt khác: $R_n(x) - R_n(0) = \int_0^x R_n'(t)dt$ hay theo (1) và tích phân ta có:

$$R_n(x) = \int_0^x R_n'(t)dt = -\int_0^x R_n'(t)d(x-t) =$$

$$= -R_n'(t)(x-t)\Big|_0^x + \int_0^x R_n''(t)(x-t)dt = \ldots = \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \qquad (2)$$

(2) gọi là số dư dạng tích phân của công thức (M) của $f(x)$.

Xét $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ thì:

$$f^{(n+1)}(t) = \alpha(\alpha-1)\ldots\ldots(\alpha-n)(1+t)^{\alpha-n-1}.$$

và

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x (x-t)^n(1+t)^{\alpha-n-1}dt \qquad (3)$$

Bây giờ xét chuỗi:

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \qquad (4)$$

là chuỗi hội tụ tuyệt đối khi $|x| < 1$.

Thực vậy

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\alpha - n}{n} x\right| \to |x| \text{ khi } n \to \infty.$$

do đó chuỗi (4) hội tụ tuyệt đối khi $|x| < 1$ (tiêu chuẩn D' Alambert).

Vậy số hạng tổng quát của chuỗi (4) phải dần đến 0.

Mặt khác theo định lý giá trị trung bình (trong tích phân xác định) thì (3) viết được:

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!}(x - \theta x)^n (1+\theta x)^{\alpha-n-1}.\, x \quad (0 < \theta < 1).$$

hay

$$R_n(x) = \frac{(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!} x^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{\alpha-1} \alpha x \qquad (3')$$

Trong (3') thừa số $\frac{(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!} x^n$ là số hạng tổng quát của chuỗi hội tụ (4) (thay α bởi $\alpha - 1$) nên thừa số này dần tới 0 khi $n \to \infty$.

Thừa số

$$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n < 1 \ \forall n, \ \forall |x| < 1.$$

vì khi $|x| < 1: 0 < 1 - \theta < 1 + \theta x$. Thừa số cuối cùng $(1 + \theta x)^{\alpha-1}.\alpha x$ cũng bị chặn khi $|x| < 1$ vì nó không phụ thuộc n.

Do đó $R_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ và ta có khai triển:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ ... \ , \forall |x| < 1.$$

Chuỗi này gọi là chuỗi nhị thức.

Chú ý:

1) Trong công thức (2) thay 0 bởi x_0 ta có số hạng dư dưới dạng tích phân của công thức Taylor.

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n-1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

2) Công thức Euler:

Ta đã có:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ \ldots$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ \ldots.$$

Thay x bởi số ảo ix (i là đơn vị ảo: $i^2 = -1$)

Ta có:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \ \ldots =$$

$$= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ \ldots.) + i(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots)$$

$$\mathbf{e^{ix} = \cos x + i\sin x} \qquad (1)$$

Thay ix bởi $-ix$ ta có:

$$\mathbf{e^{-ix} = \cos x - i\sin x} \qquad (2)$$

Cộng (trừ) vế với vế của (1) và (2) ta có:

$$\mathbf{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{\ ix}}{2}} \qquad (3)$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad (4)$$

Các công thức (1), (2), (3) và (4) gọi là các công thức Euler.

Tổng quát: Trong khai triển của e^x, thay x bởi: $z = x + iy$ ta có:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy}.$$

hay

$$e^z = (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots)(1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \ldots) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

Áp dụng phép nhân chuỗi: (***Chú ý***: sau §3 của phần A). Ta cũng có các công thức Euler, với $z = x + iy$ là một số phức bất kỳ:

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z\,, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z\,, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{\;iz}}{2i}$$

Bây giờ xét một số trường hợp đặc biệt quan trọng của chuỗi nhị thức:

a) Khai triển của ln(1 + x), ln(1 − x)

Trong chuỗi nhị thức cho $\alpha = -1$, ta có:

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \quad \text{với} \quad 1 < x < 1.$$

Do đó, theo tính chất của chuỗi lũy thừa ta có:

$$\ln|x+1| = \int_0^x \frac{dx}{x+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} + \ldots$$

với $-1 < x < 1$.

Chuỗi này cũng hội tụ tại $x = 1$, nên khai triển này vẫn đúng tại $x = 1$.

Thay x bởi $-x$ ta có:

$$\ln|1-x| = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)} + \ldots \right) \quad \text{với} \quad 1 < x < 1.$$

b) Khai triển của arctgx

Trong chuỗi nhị thức cho $\alpha = -1$, và thay x bởi x^2 ta có:

$$\frac{1}{x^2+1} = 1 - x^2 + x^4 \quad x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$$

do đó:

$$\text{arctg}x = \int_0^x \frac{dx}{x^2+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \quad 1 < x < 1.$$

Chuỗi này cũng hội tụ tại $x = \pm 1$, nên khai triển này vẫn đúng khi $x = \pm 1$.

c) Khai triển của arcsinx

Trong chuỗi nhị thức cho $\alpha = -\frac{1}{2}$ và thay x bởi $-x^2$ ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1.3x^4}{2.4} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)x^{2n}}{2.4\ldots 2n} + \ldots \quad |x| < 1$$

do đó:

$$\text{arsin}x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{x^5}{5} + \ldots$$

$$+ \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \ldots \quad \text{với } |x| < 1$$

Ta đã có khai triển theo chuỗi Maclaurin của các hàm e^x, sin$x$, cos$x$, $(1+x)^\alpha$, gọi là các khai triển cơ bản. Từ các khai triển cơ bản này ta có thể suy ra các khai triển (theo chuỗi Maclaurin) của một số hàm khác.

Thí dụ:

1) $f(x) = x^2e^x = x^2(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ \ldots)$

$$= x^2 + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \ldots + \frac{x^{n+2}}{n!} + \ldots \quad \forall x \in \boldsymbol{R}.$$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{với} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{với} \quad x = 0 \end{cases}$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots.$$

$$x \neq 0: \quad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Chuỗi này hội tụ $\forall\ x \in \boldsymbol{R}$, khi $x = 0$, tổng của nó $S(x) = 1$. Vì khi $x = 0$, $f(0) = 1$ nên:

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots \quad \forall x \in \boldsymbol{R}.$$

*3)

$$f(x) = e^x\cos x = (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ \ldots)(\ 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots)$$

$$= 1 + x + (\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24}\right)x^4 + \ldots$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad (\forall x \in \boldsymbol{R}).$$

(Theo phép nhân chuỗi §3 phần A).

§4. ÁP DỤNG CỦA CHUỖI

Trong § này ta xét việc áp dụng lý thuyết chuỗi vào tính gần đúng. Ta biết đa số các bài toán trong thực tiễn đều dưa đến việc tính gần đúng, do đó ta càng thấy tầm quan trọng lớn lao của áp dụng chuỗi vào tính gần đúng.

Đầu tiên đưa ra các công thức ước lượng sai số khi áp dụng chuỗi tính gần đúng.

Giả sử hàm $f(x)$ khai triển được theo chuỗi (T) tại lân cận điểm x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \quad \text{(T)}.$$

Nếu tính gần đúng $f(x)$ theo công thức:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

thì sai số mắc phải là:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \dots$$

Theo công thức Taylor thì:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1.$$

Do đó sai số mắc phải sẽ được ước lượng theo công thức:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right|$$

Đặc biệt nếu chuỗi (T) của $f(x)$ là chuỗi đan dấu có các số hạng giảm dần, nghĩa là:

$$f(x) = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1}.u_n + \dots$$

với $u_1 > u_2 > \dots > u_n > \dots$ nếu tính gần đúng $f(x)$ theo công thức:

$$f(x) = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1}.u_n.$$

Thì sai số mắc phải là:

$$R_n(x) = (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + (-1)^{n+2} u_{n+3} \dots$$

hay

$$R_n(x) = (-1)^n[u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) \dots]$$

suy ra:

$$|R_n(x)| = |u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) \dots |$$

nhưng $u_{n+2} - u_{n+3} > 0 \dots$, vì u_n giảm dần, theo cách chứng minh định lý về sự hội tụ của chuỗi đan dấu thì: $|R_n(x)| \le u_{n+1}$, nghĩa là sai số mắc phải bé kém số hạng đầu tiên bỏ đi.

Bây giờ ta đưa ra các thí dụ áp dụng chuỗi để tính gần đúng.

4.1. Tính giá trị của hàm số

Thí dụ:

1) Tính gần đúng $\sqrt{e}$ với độ chính xác 10^{-3}. Ta biết

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \forall x \in R.$$

cho $x = \frac{1}{2}$ ta có:

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2.1!} + \frac{1}{2^2.2!} + \dots + \frac{1}{2^n.n!} + \dots$$

Ta lại biết:

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{với } 0 < c < \frac{1}{2}$$

mặt khác:

$$e^c < e^{\frac{1}{2}} < \sqrt{3} < 2,$$

Do đó $\quad R_n(\frac{1}{2}) < \dfrac{1}{(n+1)!2^n}$

Muốn đạt độ chính xác 10^{-3} ta phải chọn n sao cho:

$\dfrac{1}{(n+1)!2^n} \le \dfrac{1}{1000}$. Dễ dàng thử thấy bất đẳng thức này thỏa mãn khi $n \ge 4$. Vậy lấy $n = 4$, thì đạt độ chính xác, nghĩa là:

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2.1!} + \frac{1}{2^2.2!} + \frac{1}{2^3.3!} + \frac{1}{2^4.4!} = 1{,}648$$

với độ chính xác 10^{-3}.

2) Tính $\sin 1 = \sin 57^0 18'$ với độ chính xác 10^{-3}.

Ta biết:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

với mọi x, cho $x = 1$ ta có:

$$\sin 1 = \sin 57^0 18' = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} + \ldots$$

Đây là chuỗi đan dấu nên $R_n(1) \le u_{n+1} = \dfrac{1}{(2n+3)!}$

Vậy phải chọn n sao cho: $\dfrac{1}{(2n+3)!} < \dfrac{1}{1000}$ chọn $n = 2$ thì được, vì:

$$\frac{1}{(2.2+3)!} = \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} < \frac{1}{1000}.$$

Do đó sin1 = sin57°18' ≈ 1- $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}$ = 0,842 với độ chính xác 10^{-3}.

3) Tính số π

Ta biết:

$$\text{arctg}x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ \dots \quad \text{với} \quad 1 < x < 1.$$

cho $\quad x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ta có:

$$\text{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1-\frac{1}{9}+\frac{1}{45}-\frac{1}{189}+\dots\right)$$

do đó $\quad \pi = 2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{9}+\frac{1}{45}-\frac{1}{189}+\dots\right)$

Dùng công thức này có thể tính gần đúng số π với độ chính xác tùy ý.

4) Tính logarithme

Ta biết

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots \qquad (1) \text{ với } -1 < x < 1.$$

$$\ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\dots \qquad (2) \text{ với } -1 < x < 1.$$

Nếu dùng các công thức này để tính gần đúng logrithme thì chỉ tính được logarithme của những số bé hơn 2 vì -1 < x < 1 nhưng ta có thể biến đổi như sau:

Lấy (1) trừ (2) ta có:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x++\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ \dots\right)\ \forall x\in(-1,\ 1) \qquad (3)$$

khi $x \in (-1, 1)$ thì biểu thức $\frac{1+x}{1-x} > 0$. Như vậy dùng (3) có thể tính logarithme của một số dương bất kỳ.

Đặt: $\frac{1+x}{1-x} = N$ khi đó $x = \frac{N-1}{N+1}$ và:

$$\ln N = 2\left[\left(\frac{N-1}{N+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^5 + \ \dots\right]$$

chẳng hạn, tính ln2 với độ chính xác 0,001 ở đây $N = 2$, $\frac{N-1}{N+1} = \frac{1}{3}$, do đó:

$$\ln 2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3.3^3} + \frac{2}{5.3^5} + \dots + \frac{2}{(2n+1).3^{2n+1}} + \dots \qquad (4)$$

vì
$$\frac{2}{(2n+1).3^{2n+1}} < \frac{2}{3^{2n+1}}$$

Nên các số hạng của (4) nhỏ hơn các số hạng tương ứng của chuỗi nhân:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^5} + \dots + \frac{2}{3^{2n+1}} + \dots \qquad (5)$$

Gọi số hạng dư của chuỗi (5) là r_n' thì:

$$r_n' = \frac{2}{3^{2n+3}} + \frac{2}{3^{2n+5}} + \dots = \frac{\frac{2}{3^{2n+3}}}{1 - \frac{1}{3^2}} = \frac{1}{4.3^{2n+1}}.$$

và số hạng dư của chuỗi (4) là r_n thì $r_n < r_n'$ hay $r_n < \frac{1}{4.3^{2n+1}}$. Lấy $n = 3$ thì

$$r_n < \frac{1}{4.3^7} < 0{,}001.$$

Vậy $\ln 2 \approx \frac{2}{3} + \frac{2}{3.3^3} + \frac{2}{5.3^5} + \frac{2}{7.3^7} = 0{,}6667 + 0{,}0247 + 0{,}0017 + 0{,}0001 = 0{,}6932 \approx 0{,}693$. Với độ chính xác 0,001.

4.2. Tính tích phân

Thí dụ:

1) Tính $I = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx$ chính xác tới 10^{-3}.

Ta biết tích phân này không tính được theo công thức Newton – Leibniz vì e^{-x^2} không có nguyên hàm biểu diễn được qua hàm sơ cấp.

Bây giờ từ:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ \ldots \qquad \forall x \in R$$

thay x bởi $-x^2$ ta có:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ \ldots \quad \forall x \in R.$$

Do đó:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx = \left(x - \frac{x^3}{1!.3} + \frac{x^5}{2!.5} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \ldots \right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

hay $\quad I = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1!.3.2^3} + \dfrac{1}{2!.5.2^5} - \dfrac{1}{3!.7.2^7} + \ldots$

Đây là chuỗi đan dấu vì $\dfrac{1}{3!.7.2^7} < 10^{-3}$ nên lấy $n = 2$ thì đạt độ chính xác.

Vậy $I \approx \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3.2^3} + \dfrac{1}{2!.5.2^5} = 0{,}461$ chính xác tới 10^{-3}.

2) Tính $I = \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$.

Ta biết

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + .. \qquad \forall x \in R$$

nên

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots \qquad \forall x \neq 0.$$

vì $\lim\limits_{n \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, nên khai triển này đúng $\forall x \in \boldsymbol{R}$.

Do đó

$$I = \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \left(\frac{x}{1!} - \frac{1}{3!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!}\frac{x^5}{5} + \ldots \right)\Bigg|_0^a$$

hay

$$I = a - \frac{a^3}{3!.3} + \frac{a^5}{5!.5} - \ldots$$

Dùng công thức này có thể tính I với độ chính xác tùy ý.

4.3. Giải phương trình vi phân

Ta biết, nói chung phương trình vi phân chỉ có thể giải gần đúng. Một trong các phương pháp giải gần đúng là dùng chuỗi. Ta sẽ áp dụng chuỗi để giải bài toán Cauchy. Chẳng hạn, xét bài toán Cauchy:

Tìm nghiệm của phương trình: $y'' = F(x, y, y')$ (1).

Thỏa mãn sơ kiện $y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0'$ (2)

Đối với phương trình cấp cao ta có thể làm tương tự.

a) Trường hợp chung

Giả sử nghiệm của bài toán (1), (2) tồn tại và khai triển được theo chuỗi Taylor tại lân cận điểm x_0.

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots.$$

Dựa vào (1) (2) ta sẽ tìm được $f(x_0)$, $f'(x_0)$,..., $f^{(n)}(x_0)$ và có nghiệm phải tìm.

Thực vậy, từ (2) ta có:

$$f(x_0) = y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad , f'(x_0) = y'\big|_{x=x_0} = y'_0$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$f''(x_0) = y''\big|_{x=x_0} = F(x, y, y')\big|_{x \quad x_0} = F(x_0, y_0, y'_0)$$

Đạo hàm (1) ta được: $y''' = F'_x + F'_y y' + F'_{y'} y''$

Do đó, và theo trên: $f'''(x_0) = y'''\big|_{x \quad x_0}$, ta có $f'''(x_0)$, ...

Trong thực tế, sau khi tìm được chuỗi Taylor của y, ta phải xét sự hội tụ của chuỗi đó.

Thí dụ:

1) Giải phương trình: $y' = 2y^2$.

Thỏa mãn sơ kiện : $y\big|_{x=0} = 1$. Ta có:

$$f(0) = y\big|_{x=0} = 1, \; f'(0) = 2y^2\Big|_{x=0} = 2, \; f''(0) = y''\big|_{x=0} = 4yy'\big|_{x=0} = 8.$$

$$f'''(0) = f'''\big|_{x=0} = 4y'^2 + 4yy''\Big|_{x=0} = 48, \dots$$

Thay vào khai triển Taylor của nghiệm $y = f(x)$ tại lân cận điểm $x = 0$ ta có: $y = f(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$ vế phải là chuỗi nhân công bội $q = 2x$, nó hội tụ khi $|2x| < 1$ hay: $|x| < \frac{1}{2}$, lúc đó tổng của nó là $\frac{1}{1-2x}$.

Vậy ta có nghiệm phải tìm là:

$$y = \frac{1}{1-2x} \quad \text{với} \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

Thực ra hàm số này thỏa mãn phương trình và sơ kiện trên với mọi x, trừ $x = \frac{1}{2}$, nên nó là nghiệm của bài toán với mọi x trừ $x = \frac{1}{2}$.

Chú ý rằng phương trình trên có thể giải bằng phương pháp phân ly biến số. Thực vậy, từ $y' = 2y^2$ ta có $\frac{dy}{y^2} = 2dx$ suy ra $-\frac{1}{y} = 2x + c$ hay $y = \frac{-1}{2x+c}$.

Cho thỏa mãn sơ kiện ta có: $1 = \frac{1}{0+c}$ suy ra $c = -1$ và ta có nghiệm riêng $y = \frac{1}{1-2x}$ trùng với kết quả trên.

2) Giải phương trình: $\quad y' = x - y^2 \quad$ (1)

Thỏa mãn sơ kiện $\quad y\big|_{x=1} = 1 \quad$ (2)

Giả sử nghiệm $y = f(x)$ khai triển được theo chuỗi Taylor tại lân cận điểm: $x = 1$.

$$y = f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots$$

ở đây, ta có

$$f(1) = y\big|_{x=1} = 1, f'(1) = y'\big|_{x=1} = x - y^2\big|_{x=1} = 1 - 1 = 0$$

$$f''(1) = y''\big|_{x=1} = (1 - 2yy')\big|_{x=1} = 1 - 2.1.0 = 1$$

Tương tự:

$$f'''(1) = -2, f^{(4)}(1) = 4, f^{(5)} = -14, f^{(6)} = 68, f^{(7)} = -336.$$

Do đó ta có nghiệm của bài toán (1), (2):

$$y = f(x) = 1 + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{6} -$$

$$- \frac{(x-1)^5}{60} + 17\frac{(x-1)^6}{180} - \frac{(x-1)^7}{15} + \ldots \qquad (3)$$

Ta thấy chuỗi ở vế phải, hệ số của 7 số hạng đầu không có quy luật gì, nên đến đây không thể biết chuỗi hội tụ hay không mà chỉ biết nó thỏa mãn sơ kiện (2).

Muốn biết nó là nghiệm của phương trình chính xác đến mức nào, ta chỉ có thể thử tại những điểm cụ thể.

Chẳng hạn tại $x = \frac{1}{2}$, thay vào (3), tính đến 7 số hạng đầu ta có : $y = 1{,}183$, đạo hàm (3), thay $x = \frac{1}{2}$ vào và cũng tính đến 7 số hạng đầu ta có: $y' = -0{,}895$.

Thay vào (1) và tính toán ta có: vế trái là $y' = -0{,}895$ vế phải là $x \quad y^2 = -0{,}899$.

Vậy sai số ở hai vế là -0,004.

b) Trường hợp phương trình tuyến tính

Đối với phương trình vi phân tuyến tính, dùng chuỗi lũy thừa để giải nhiều khi thuận tiện hơn, phương pháp này gọi là phương pháp hệ số bất định, nội dung như sau:

Giả sử phương trình tồn tại nghiệm là tổng của chuỗi lũy thừa: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ***trong một miền nào đó. Đạo hàm y thay vào phương trình ta được một đồng nhất thức, đồng nhất các hệ số, ta tìm được các*** a_n ***(n = 0, 1, 2, ...) sau đó xét sự hội tụ của chuỗi ta sẽ có nghiệm phải tìm. Ta sẽ minh họa phương pháp này qua thí dụ sau:***

Thí dụ: Giải phương trình

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{k^2}{x^2})y = 0 \qquad k > 0$$

phương trình này gọi là phương trình Bessel cấp $k > 0$, có rất nhiều ứng dụng trong vật lý toán. Để đơn giản, ta chỉ giải phương trình Bessel cấp không:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0 \qquad (1)$$

Giả sử nghiệm của (1) là tổng của chuỗi lũy thừa $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (2) trong một miền nào đó.

Đạo hàm ta có:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

Thay vào (1) ta có đồng nhất thức

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Bây giờ cho bằng không hệ số của các lũy thừa của x, ta có:

- Hệ số của $\frac{1}{x}$ là a_1, nhưng trong chuỗi không có $\frac{1}{x}$ nên bắt buộc $a_1 = 0$.

- Hệ số của x^n: $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_{n+2} + a_n = 0$, suy ra:

$$(n+2)^2 a_{n+2} + a_n = 0 \text{ hay } a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)^2} \qquad (3)$$

Từ (3) suy ra: $a_2 = \frac{-a_0}{2^2}$, $a_3 = \frac{-a_1}{3^2} = 0$ vì $a_1 = 0$,

$$a_4 = \frac{-a_2}{4^2} = \frac{a_0}{2^2\,4^2}, \ldots$$

Tổng quát:

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^2.4^2...(2m)^2} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m}.(m!)^2}, \quad a_{2m+1} = 0.$$

Thay vào (2) ta có:

$$y = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{2^{2m}.(m!)^2}$$

Dễ dàng thấy $\lim_{m \to \infty} \left| \frac{a_{2m+2}}{a_{2m}} \right| = 0$, do đó chuỗi này hội tụ $\forall x$ nghĩa là nó là nghiệm của phương trình (1), $\forall x$.

Lấy $a_0 = 1$, ký hiệu:

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{2^{2m}.(m!)^2}$$

Tất nhiên $J_0(x)$ vẫn là nghiệm của (1), người ta gọi $J_0(x)$ là hàm Bessel cấp không.

Đối với phương trình Bessel cấp k nguyên, làm tương tự ta có nghiệm riêng:

$$J_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+k}}{2^{2m+k}.(m!)(m+k)!}$$

$J_k(x)$ gọi là hàm Bessel cấp k.

C. CHUỖI VÀ TÍCH PHÂN FOURIER

§1. CHUỖI LƯỢNG GIÁC

Trong khoa học và kỹ thuật ta thường gặp các hiện tượng tuần hoàn nghĩa là các hiện tượng sau một thời gian nhất định lại lặp lại như cũ, chẳng hạn: mực nước thủy triều lên xuống, cường độ dòng điện xoay chiều, các dao động cơ học...

Về toán học để nghiên cứu các hiện tượng tuần hoàn, ta dùng các hàm tuần hoàn. Ta biết các hàm tuần hoàn đơn giản nhất là các hàm số lượng giác dạng:

$$\sin nx, \cos nx \qquad (1)$$

Trong thực tiễn có những quá trình gồm nhiều hoặc có khi vô số các hiện tượng tuần hoàn đơn giản. Do đó để miêu tả toàn bộ quá trình, ta phải nghiên cứu một tổng vô hạn các hàm lượng giác (1) nghĩa là nghiên cứu một chuỗi hàm mà các số hạng là các hàm lượng giác đó, gọi là chuỗi hàm lượng giác.

Định nghĩa:

Chuỗi hàm có dạng:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

gọi là chuỗi hàm lượng giác. Trong đó a_0, a_n, b_n, $n = 1, 2, \ldots$ là các hằng số gọi là các hệ số của nó.

Ta thấy chuỗi hàm lượng giác là một loại chuỗi hàm đặc biệt, nên nó có mọi khái niệm, tính chất của chuỗi hàm tổng quát. ***Đặc biệt, ta thấy nếu chuỗi hàm lượng giác có tổng là $f(x)$ hay hội tụ về $f(x)$ trong một miền nào đó thì $f(x)$ phải là tuần hoàn chu kỳ 2π.***

Thực vậy, rõ ràng tổng S_n của chuỗi:

$$S_n=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

là một hàm tuần hoàn chu kỳ 2π (mỗi số hạng có chu kỳ $\frac{2\pi}{k}$).

Do đó:

$$S(x + 2\pi) = \lim_{n \to \infty} S_n(x + 2\pi) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = S(x).$$

§2. CHUỖI FOURIER

Theo §1 để nghiên cứu một quá trình gồm vô số hiện tượng tuần hoàn đơn giản, ta đi đến nghiên cứu chuỗi hàm lượng giác:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

Bây giờ xét vấn đề ngược lại rất quan trọng trong thực tiễn là: có rất nhiều quá trình biểu diễn bằng một hiện tượng tuần hoàn phức tạp, để nghiên cứu được thuận lợi ta phải phân tích hiện tượng tuần hoàn phức tạp đó thành những hiện tượng tuần hoàn đơn giản.

Để giải quyết vấn đề này, về toán học ta phải giải bài toán: ***Cho trước hàm số f(x) tuần hoàn chu kỳ 2π, tìm chuỗi lượng giác (1) có tổng là f(x) hay hội tụ về f(x). Người ta gọi việc làm đó là khai triển f(x) thành chuỗi lượng giác.***

Để giải quyết bài toán này ta chia làm hai bước:

1) Giả sử hàm $f(x)$ đã khai triển được theo chuỗi lượng giác (1) nghĩa là:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad 2)$$

Từ đó ta sẽ tính a_0, a_n, b_n, $n = 1, 2, \ldots$

2) Tìm điều kiện để $f(x)$ khai triển được theo chuỗi lượng giác (1), nghĩa là tìm điều kiện để có (2).

Bây giờ lần lượt ta giải quyết các bước này.

2.1. Các hệ số và chuỗi Fourier

Đầu tiên ta chứng minh một bổ đề dùng về sau.

Bổ đề:

$$\int_{\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\int_{\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu : } m \neq n \\ \pi & \text{nếu : } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx\, dx = 0\,, \quad m, n = 1, 2, \ldots$$

Ta chỉ chứng minh một công thức (các công thức khác chứng minh tương tự) chẳng hạn chứng minh:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = 0\,, \quad \text{nếu } m \neq n$$

Thực vậy vì

$$\cos nx.\cos mx = \frac{1}{2}[\cos(n+m)x + \cos(n \quad m)x]$$

nên

$$\int_{\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n \quad m)x]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)x}{(n+m)} + \frac{\sin(n-m)x}{(n-m)}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Bây giờ ta đưa ra định lý giải quyết bước 1 của bài toán.

Định lý:

Nếu f(x) tuần hoàn chu kỳ 2π, khai triển được theo chuỗi lượng giác, nghĩa là:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad (a)$$

(chuỗi là hội tụ đều về f(x), ∀x ∈ R) thì:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (b)$$

$n = 1, 2, ...$

Chứng minh:

Để có a_0, lấy tích phân 2 vế của (a) theo x từ $-\pi$ đến π ta có:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx\right)$$

Theo công thức (1) của bổ đề trên thì số hạng sau của vế phải đẳng thức này bằng 0, do đó:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{a_0}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} = a_0\pi$$

suy ra $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Để tính a_n, ta nhân hai vế của (a) với $\cos mx$ rồi lấy tích phân theo x từ $-\pi$ đến π, ta có:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx dx\right).$$

Ở vế phải:

Số hạng thứ nhất bằng 0, theo công thức (1) của bổ đề.

Còn tổng Σ, theo các công thức (2), (3) của bổ đề chỉ còn lại số hạng:

$$a_n \int_{\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = a_n.\pi$$

ứng với $m = n$, còn các số hạng khác đều bằng 0.

Do đó $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n.\pi$, suy ra:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

Ta thấy các công thức tính a_0, a_n có thể thống nhất làm một:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

do ta lấy số hạng đầu của chuỗi là: $\frac{a_0}{2}$. Tương tự, ta có b_n.

Định nghĩa:

Các hệ số a_0, a_n, b_n, $n = 1, 2, \ldots$ tính theo công thức (b) gọi là các hệ số Fourier, còn chuỗi lượng giác có các hệ số Fourier gọi là chuỗi Fourier của hàm $f(x)$.

Đặc biệt:

Nếu $f(x)$ chẵn thì theo tính chất của tích phân lấy trong khoảng đối xứng ta có:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = 0, \; n = 1, 2, \ldots$$

(vì $f(x)\cos nx$ chẵn, $f(x)\sin nx$ là lẻ).

Lúc đó trong khai triển của $f(x)$ chỉ có những số hạng có dạng cos, ta bảo ***hàm $f(x)$ khai triển được theo chuỗi Fourier dưới dạng cos hay khai triển chẵn.***

Nếu $f(x)$ lẻ:

$$a_0 = a_n = 0, \ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx\,, \ n = 1, 2$$

(vì $f(x)\cos nx$ lẻ, $f(x)\sin nx$ là chẵn).

Lúc đó trong khai triển của $f(x)$ chỉ có sin ta bảo ***f(x) khai triển được thành chuỗi Fourier dưới dạng sin hay khai triển lẻ:***

Chú ý:

1) Nếu $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ T thì:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \quad \forall a \in R.$$

Thực vậy:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx +$$

$$\int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(x)dx + \int_a^T f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Suy ra: Các hệ số Fourier sẽ không khác trước nếu ta lấy tích phân trên đoạn khác vẫn có độ dài 2π.

2) Rõ ràng điều kiện đủ để chuỗi lượng giác (1) hội tụ tuyệt đối và đều về $f(x)$, $\forall x \in R$ là chuỗi số:

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$$

hội tụ vì

$$|a_n\cos nx| \le |a_n|, \quad |b_n\sin nx| \le |b_n| \quad (\forall x \in R)$$

nên chuỗi số dương này là chuỗi trội của chuỗi trị số tuyệt đối của chuỗi (1), theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi (1) là hội tụ tuyệt đối và đều $\forall x \in R$.

Rõ ràng các hệ số Fourier tồn tại chỉ với điều kiện $f(x)$ khả tích trên $[-\pi, \pi]$.

2.2. Điều kiện để $f(x)$ khai triển được theo chuỗi Fourier

Để giải quyết bước 2 của bài toán ta có:

Định lý Dirichlet 1:

Nếu hàm $f(x)$:

1) Tuần hoàn chu kỳ 2π, khả tích trên đoạn $[-\pi, \pi]$.

2) Tồn tại các giới hạn một phía:

$$\lim_{h \to +0} f(x - h) = f(x-), \quad \lim_{h \to +0} f(x + h) = f(x+) \quad (h > 0) \text{ tại } x \in [-\pi, \pi].$$

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(x-h) - f(x^-)}{-h}, \quad \lim_{h \to +0} \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h}$$

thì chuỗi Fourier của $f(x)$ hội tụ về

$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2}$$

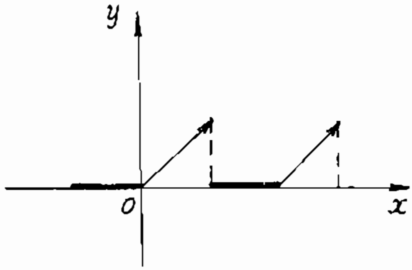
Đặc biệt nếu $f(x)$ liên tục và có đạo hàm một phía tại x thì chuỗi Fourier của $f(x)$ hội tụ đều về $f(x)$ tại x.

Ta sẽ chứng minh định lý này ở §3, bây giờ ta tạm công nhận để áp dụng xét 1 số khai triển.

Thí dụ:

1) Khai triển hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π xác định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & khi \quad -\pi \le x \le 0 \\ x & khi \quad 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{(H.197)}$$



Hình 197

Rõ ràng $f(x)$ thỏa mãn điều

kiện khai triển (Định lý Dirichlet) ta tính:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0}0.dx+\int_{0}^{\pi}x.dx\Big)=\frac{1}{\pi}.\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0}0.\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}x.\cos nx.dx\Big)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x.\cos nx.dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\Big(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\Big)=\frac{1}{\pi n}\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}\dfrac{-2}{\pi n^2} & \text{nếu}\quad n=2m+1\\ 0 & \text{nếu}\quad n=2m\end{cases}\qquad (m=0,1,2,\ldots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0}0.\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}x.\sin nx.dx\Big)=$$

$$\frac{1}{\pi}\Big(\frac{-x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\Big)=\frac{-\pi}{\pi n}\cos n\pi=\frac{-1}{n}(-1)^n=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & \text{nếu}\quad n=2m+1,\ (m=0,1,2,..)\\ \dfrac{-1}{n} & \text{nếu}\quad n=2m,\ (m=1,2,\ldots)\end{cases}$$

Vậy

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\Big(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}+\ldots$$

$$+\Big(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\ldots\Big)$$

2) Khai triển hàm $f(x)$, tuần hoàn chu kỳ 2π, xác định bởi:

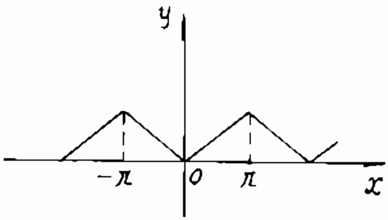
$$f(x)=\begin{cases}-x & khi\quad -\pi\le x<0\\ x & khi\quad 0\le x\le\pi\end{cases}\quad \text{(H. 198)}$$

Rõ ràng $f(x)$ ở đây cũng thỏa mãn điều kiện khai triển, $f(x)$ lại là hàm số chẵn nên $b_n=0$ ta chỉ phải tính a_0, a_n.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}.\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-4}{\pi n^2} & \text{nếu} \quad n = 2m+1 \\ 0 & \text{nếu} \quad n = 2m \end{cases}$$



(xem thí dụ 1)

Hình 198

do đó:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2} + \ldots),\ \forall x \in R$$

Đặc biệt $x = 0$ ta có:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(1 + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(2m+1)^2} + \ldots),$$

suy ra:

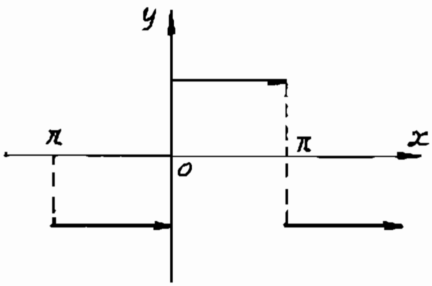
$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2m+1)^2} + \ldots$$

Nếu tìm tổng của chuỗi ở vế phải theo định nghĩa thì rất khó khăn.

3) Khai triển $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\pi}{4} & \text{nếu} \quad -\pi \le x < 0 \\ \dfrac{\pi}{4} & \text{nếu} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

(H.199)



Hình 199

Rõ ràng thỏa mãn điều kiện khai triển, ở đây $f(x)$ lẻ nên:

$$a_n = 0,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

Ta tính:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx dx = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{-1}{2n}(\cos n\pi - 1) = \frac{-1}{2n}[(-1)^n - 1] =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{n}: \text{nếu} & n = 2m+1 \\ 0: \text{nếu} & n = 2m \end{cases}$$

do đó:

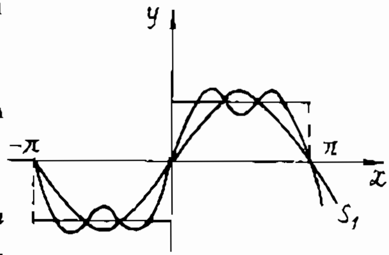
$$f(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin(2m+1)x}{(2m+1)} + \dots$$

cho $x = \frac{\pi}{2}$ thì :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^m}{(2m+1)} + \dots$$

Ta có $S_1 = \sin x$, $S_2 = \sin x + \frac{\sin 3x}{3}$.

Hình vẽ cho hình ảnh của sự hội tụ của S_1, S_2, ... về $f(x)$. (H.200)



Hình 200

2.3. Khai triển hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ $2l$ theo chuỗi Fourier

Ta đã xét khai triển của hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π, bây giờ ta xét khai triển của hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ $2l$, $l > 0$ bất kỳ theo chuỗi Fourier.

Ta sẽ đổi biến số để đưa về trường hợp đã xét:

Đặt $x = \frac{l}{\pi}t$ thì $f(x) = f(\frac{l}{\pi}t) = \varphi(t)$ và khi $-l \le x \le l$ thì $-\pi \le t \le \pi$.

Do đó theo trường hợp đã xét:

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

với

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt dt \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt dt \quad (n = 1, 2, ...).$$

Trở lại biến số cũ bằng cách thay $t = \frac{\pi x}{l}$

(Rút từ $x = \frac{l}{\pi}t$); $dt = \frac{\pi}{l}dx$, ta có:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l})$$

với
$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 1, 2, ...)$$

Đặc biệt nếu f(x) chẵn thì:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, ...)$$

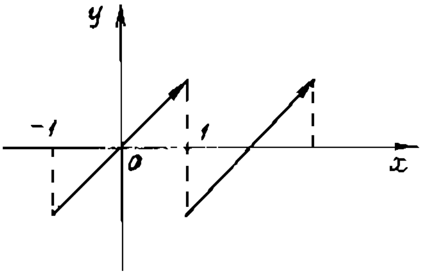
Nếu f(x) lẻ thì:

$$a_n = 0, (n = 0, 1, 2, ...)$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$(n = 1, 2, \ldots)$

Thí dụ:



Hình 201

1) Khai triển hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ $T = 2$ xác định bởi: $f(x) = x$ nếu $-1 \le x \le 1$ (H.201) theo chuỗi Fourier, ở đây $f(x)$ lẻ, $l = 1$. Nên $a_n = 0$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

Ta chỉ còn tính b_n.

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin\frac{n\pi x}{1}dx = 2\Big[\frac{-x\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{n\pi}dx\Big] =$$

$$= 2\Big[\frac{-\cos n\pi}{n\pi} + \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\Big|_0^1\Big] = \frac{-2(-1)^n}{n\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Do đó:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\sin\pi x}{1} - \frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin n\pi x}{n} + \ldots\Big)$$

2) Khai triển hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ π xác định như sau:

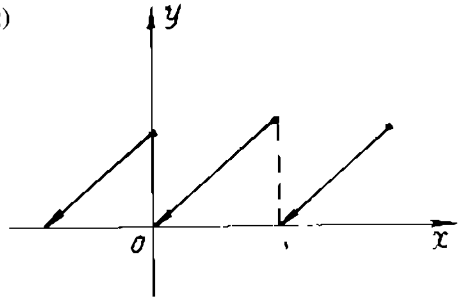
$f(x) = x$ với $0 < x \le \pi$ (H. 202)

chy kỳ của hàm số là $2l = \pi$

Theo chú ý ở 2.1 ta có:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)dx = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos 2nx dx$$



Hình 202

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin 2nx}{2n} + \frac{\cos 2nx}{4n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-x\cos 2nx}{2n} + \frac{\sin 2nx}{4n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{-1}{n}$$

Vậy

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\sin 2x}{1} + \frac{\sin 4x}{2} + \ldots + \frac{\sin 2nx}{n} + \ldots\right)$$

2.4. Khai triển hàm $f(x)$ trong đoạn $[0, l]$ theo chuỗi Fourier

Ta đã xét khai triển của hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ $2l$ theo chuỗi Fourier. Bây giờ ta xét khai triển hàm $f(x)$ không tuần hoàn cho trong đoạn tùy ý $[a, b]$. Không kém phần tổng quát, ta xét $a = 0$, $b = l$ nghĩa là xét đoạn $[0, l]$. Vì nếu không thì tịnh tiến trục ta cũng có đoạn này.

Để khai triển hàm $f(x)$ không tuần hoàn cho trong đoạn $[0, l]$ ta làm như sau:

Dựng một hàm $f_1(x)$ tuần hoàn chu kỳ $2l$ và trong $[0, l]$:

$$f_1(x) = f(x).$$

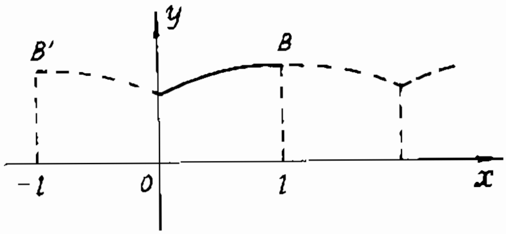
Khai triển hàm $f_1(x)$ tuần hoàn chu kỳ $2l$ vừa tìm được theo chuỗi Fourier.

Vì trong $[0, l]$, $f_1(x) = f(x)$ nên chuỗi Fourier vừa tìm được sẽ có tổng là $f(x)$ hay hội tụ về $f(x)$ trong $[0, l]$ nghĩa là ta đã khai triển được hàm $f(x)$ theo chuỗi Fourier trong đoạn đó.

Ta xét vài cách trong thực tiễn thường làm để dựng hàm $f_1(x)$.

1) Giả sử đồ thị của $f(x)$ trong đoạn $[0, l]$ là cung $\overset{\frown}{AB}$ lấy cung $\overset{\frown}{AB'}$ đối xứng với $\overset{\frown}{AB}$ qua trục Oy và lấy $f_1(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ $2l$ đồ thị của nó trong khoảng $[-l, l]$ là cung $\overset{\frown}{B'AB}$ (H. 203) rõ ràng $f_1(x)$ là hàm chẵn nên trong khai triển của nó chỉ có cos. Người ta gọi việc biến hàm $f(x)$ thành hàm $f_1(x)$ như vậy là ***kéo dài chẵn $f(x)$ thành $f_1(x)$, hay khai triển $f(x)$ theo cos.***

2) Tương tự như 1) biến $f(x)$ thành $f_1(x)$ là hàm lẻ, lúc đó trong khai triển của nó chỉ có sin. Người ta gọi việc làm đó là ***kéo dài lẻ f(x) thành $f_1(x)$ hay khai triển f(x) theo sin.***



Hình 203

Thí dụ:

1) Khai triển $f(x) = x$ trong [0, 1] theo chuỗi Fourier. Ta sẽ kéo dài lẻ $f(x)$ thành $f_1(x)$, nghĩa là lấy $f_1(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ $T = 2$, xác định bởi:

$$f_1(x) = x \text{ trong } [-1,\ 1].$$

Theo thí dụ ở 2.3 ta có:

$$f_1(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin \pi x}{1} - \frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{\sin n\pi x}{n} + \dots\right)$$

Do đó trên [0, 1] ta có:

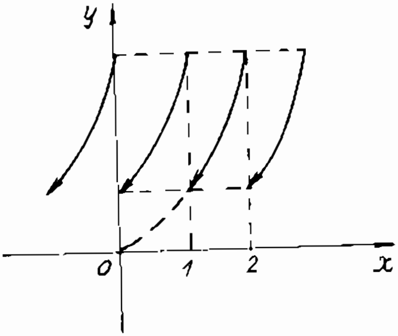
$$f(x) = f_1(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin \pi x}{1} - \frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{\sin n\pi x}{n} + \dots\right)$$

2) Khai triển hàm $f(x) = x^2$ với $1 < x < \leq 2$ theo chuỗi Fourier.

Xét $f_1(x)$ tuần hoàn chu kỳ $T = 1 = 2l$: $f_1(x) = f(x) = x^2$ trên (1, 2) (H. 204). Theo chú ý ở 2.1, ta có ($a = 1$, $T = 1$).

$$a_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}}\int_1^2 x^2 dx = \frac{14}{3}$$

$$a_n = 2\int_1^2 x^2 \cos 2n\pi x dx = \frac{1}{\pi^2 n^2}$$



Hình 204

$(n = 1, 2, \ldots)$

$$b_n = 2\int_1^2 x^2 \sin 2n\pi x dx = \frac{-3}{\pi n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Vậy

$$f(x) = \frac{7}{3} + \left(\frac{\cos 2\pi x}{1^2\pi^2} + \frac{\cos 4\pi x}{2^2\pi^2} + \ldots\right) - \frac{3}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi x}{1} + \frac{\sin 4\pi x}{2} + \ldots\right)$$

Trong thí dụ này, ta đã kéo dài trực tiếp hàm $f(x)$ thành hàm tuần hoàn $f_1(x)$.

*§3. CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ DIRICHLET 1

Trước hết ta chứng minh:

3.1. Bổ đề

Nếu f(x) khả tích trên [a, b] thì:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\sin\lambda x dx = 0 \quad (\infty = +\infty) \tag{1}$$

Chứng minh:

Ta có

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b \sin\lambda x dx = \lim_{\lambda\to\infty} \left.\frac{-\cos\lambda x}{\lambda}\right|_a^b = 0 \tag{2}$$

Bây giờ chia $[a, b]$ ra làm n phần bất kỳ bởi các điểm $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_i \ldots < x_{n+1} = b$.

Đặt $m_i = \inf\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Xét: $g(x) = m_i$ khi $x_i \le x \le x_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

Theo (2) thì

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b g(x)\sin\lambda x dx = 0 \qquad (3)$$

mặt khác, tích phân $\int_a^b g(x)dx$ là tổng Daboux dưới của $f(x)$ mà giới hạn của nó là tích phân $\int_a^b f(x)dx$ do đó $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n > n_0$.

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \right| = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \right| < \varepsilon.$$

Theo định nghĩa của m_i: $f(x) - m_i \geq 0$, $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Do đó $f(x) - g(x) \geq 0$ và

$$\left| \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \right| = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

(trị số tuyệt đối của tổng các số hạng dương bằng tổng các trị số tuyệt đối của các số hạng)

Vậy với $g(x)$ đã chọn, ta có:

$$\left| \int_a^b f(x)\sin\lambda x dx - \int_a^b g(x)\sin\lambda x dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)|\,|\sin\lambda x|\,dx$$

$$\leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon(b - a) \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x)\sin\lambda x dx = 0$$

Tương tự ta có

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = 0$$

áp dụng bổ đề này ta thấy các hệ số Fourier của một hàm khả tích dần tới không khi $n \to \infty$. Điều này là hiển nhiên nếu các hệ số là hệ số của 1 chuỗi hội tụ (điều mà ta vẫn còn chưa biết).

Hệ quả: ***Nếu hàm f(x) liên tục và có đạo hàm liên tục trên [a, b] trừ tại một số hữu hạn điểm f(x) và f'(x) có gián đoạn loại một thì:***

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0$$

Thực vậy vì khi đó $f(x)$ là khả tích trên $[a, b]$ theo bổ đề, ta có đẳng thức trên.

3.2. Chứng minh định lý Dirichlet

Theo lượng giác sơ cấp:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \qquad (1)$$

Xét

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) .$$

Theo công thức xác định các hệ số Fourier (2.1) thì:

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^{n} [\frac{1}{\pi} (\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt) \cos kx)$$

$$+ \frac{1}{\pi} (\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt) \sin kx)]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)] dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(t) [\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t - x)] dt .$$

Theo (1):

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{(t-x)}{2}}dt$$

Đặt $t - x = u$ thì:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}du \qquad (2)$$

Đặt

$$D_n(u) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}$$

gọi là nhân Dirichlet (tích phân $\int_a^b D_n(u)dx$ gọi là tích phân Dirichlet).

Rõ ràng $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)dx = 1$.(đặt $f = 1$ trong (2))

Xét:

$$S_n(x) - \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \int_{-\pi}^{0}[f(x+u)-f(x^-)]D_n(u)du$$

$$+\int_{0}^{\pi}[f(x+u)-f(x+)]D_n(u)du \qquad (3)$$

với $f(x^+) = f(x+0)$, $f(x^-) = f(x-0)$.

Theo giả thiết 2, của định lý thì các hàm:

$$\frac{[f(x+u)-f(x^-)]}{\sin\frac{u}{2}};\quad \frac{[f(x+u)-f(x^+)]}{\sin\frac{u}{2}}$$

là bị chặn tại lân cận điểm $u = 0$. do đó chúng khả tích trên các đoạn $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$ theo bổ đề trên các tích phân ở vế phải của (3) dần tới không khi $n \to \infty$ do đó:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$$

Nếu $f(x)$ liên tục tại x thì $f(x) = \dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$

và $$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x).$$

Còn sự hội tụ đều của chuỗi về $f(x)$ thì suy từ hệ quả của tính chất của chuỗi hàm tổng quát:

Mọi chuỗi hàm có các số hạng là các hàm số liên tục hội tụ về một hàm liên tục trong một đoạn nào đó thì chuỗi hội tụ đều trên đoạn đó (?).

3.3. Định lý Dirichlet 2

Ta đã có định lý Dirichlet 1, đó là một điều kiện đủ để khai triển $f(x)$ theo chuỗi Fourier.

Dirichlet cũng đã chứng minh được điều kiện đủ tổng quát hơn sau đây, gọi là định lý Dirichlet 2 (chứng minh tương tự với chứng minh định lý Dirichlet 1):

Nếu:

1) Hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π, khả tích $[-\pi, \pi]$.

2) Tồn tại một cách chia đoạn $[-\pi,\pi]$:

$-\pi = x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{n+1} = \pi$ sao cho trong mỗi khoảng (x_i, x_{i+1}), $(i = 1, 2, \dots, n)$ hàm $f(x)$ liên tục và đơn điệu thì chuỗi Fourier của $f(x)$ hội tụ về $\dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$, $\forall x \in [-\pi,\pi]$ trong đó $f(x^+)$, $f(x^-)$ là các giới hạn bên phải, trái của $f(x)$ tại x.

Đặc biệt nếu $x \subset [-\pi,\pi]$ là một điểm liên tục của $f(x)$ thì chuỗi Fourier của $f(x)$ hội tụ về $f(x)$.

Thí dụ. Trong các thí dụ đã xét ở 2.2 thì các hàm $f(x)$ đều thỏa mãn định lý Dirichlet 2.

Chú ý:

1) So sánh với điều kiện để khai triển $f(x)$ thành chuỗi Taylor thì điều kiện khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier là rộng rãi hơn nhiều, do đó chuỗi Fourier được áp dụng rộng rãi trong các ngành khoa học.

2) Hàm $f(x)$ thỏa mãn điều kiện 2) trong định lý Dirichlet 2 gọi hàm liên tục và đơn điệu từng phần (khúc).

3) Xét khai triển Fourier của hàm $f(x)$ trên $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Ta tính:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} [\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)]^2 dx$$

Theo công thức b), (2.1) thì:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Công thức này gọi là công thức Parseval, nó cho cách tính giá trị trung bình của bình phương của hàm tuần hoàn trong một chu kỳ.

*3.4. Tính khả vi và khả tích của chuỗi Fourier

Ta có thể chứng minh: Nếu $f(x)$ và các đạo hàm của nó đến cấp m ($m \geq 1$) liên tục trên $[-l, l]$ và $f(-l) = f(l)$, $f'(-l) = f'(l)$, ..., $f^{(m)}(-l) = f^{(m)}(l)$ ngoài ra $f(x)$ có đạo hàm cấp $m + 1$ liên tục từng phần trên $[-l, l]$ thì:

1) Chuỗi số $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^{n}(|a_k|+|b_k|)$ hội tụ

2) Có thể đạo hàm từng số hạng chuỗi Fourier của $f(x)$ m lần trên $[-l, l]$.

Nếu $f(x)$ khả tích Riemann trên $[-l, l]$ thì có thể lấy tích phân từng số hạng chuỗi Fourier của nó trên đoạn này.

*§4. CHUỖI FOURIER DƯỚI DẠNG PHỨC

Dùng số phức và các công thức Euler, có thể đưa chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$ về dạng phức:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

là khai triển theo chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ trên $[-\pi,\pi]$.

Theo các công thức Euler:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

Ta có:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{inx}(a_n - ib_n) + e^{-inx}(a_n + ib_n)$$

Đặt $C_n = a_n - ib_n$, $C_{-n} = a_n + ib_n$ thì $\overline{C_n} = C_{-n}$ ($\overline{C_n}$ (liên hợp phức của C_n).

thì:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inx} + C_{-n}e^{-inx} \qquad (2)$$

Theo các công thức (6), (2.1) thì:

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

$$C_{-n} = \overline{C_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx$$

(C_{-n} nhận được từ C_n bằng cách thay n bởi $-n$) do đó công thức (2) có thể viết gọn:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \tag{3}$$

Với $$C_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad \text{và } c_0 = a_0$$

Chuỗi (3) gọi là dạng phức của chuỗi Fourier (1) của hàm f(x) trên đoạn [-π, π].

Thí dụ:

Khai triển theo chuỗi Fourier hàm $f(x) = e^x$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$.

Ta có:

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(1-in)}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{e^{x(1-in)}}{1-in}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi(1-in)}(e^{\pi}e^{-in\pi} - e^{-\pi}e^{in\pi})$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi(1-in)}(e^{\pi} - e^{-\pi})$$ (vì $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = \cos n\pi = (-1)^n$).

Do đó:

$$f(x) = \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{inx}}{1-in}$$

Ta có thể đưa chuỗi này về dạng thực.

Xét số hạng ứng với n và $-n$.

$$(-1)^n \frac{e^{inx}}{1-in} + (-1)^n \frac{e^{-inx}}{1+in} = (-1)^n \frac{e^{inx} + e^{-inx} + ni(e^{inx} - e^{-inx})}{1+n^2}$$

$$= (-1)^n \frac{2\cos nx - 2n\sin nx}{1+n^2}$$

Vậy

$$f(x) = \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx - n\sin x}{1+n^2}\right]$$

Chú ý:

Tương tự ta có chuỗi Fourier dưới dạng phức của hàm $f(x)$ trên đoạn $[-l, l]$:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n x}, \quad C_n = \frac{1}{l}\int_{l}^{l} f(x) e^{-iw_n x} dx, \quad w_n = \frac{\pi n}{l}$$

*§5. CHUỖI FOURIER TỔNG QUÁT

Ta đã xét bài toán: Khai triển hàm $f(x)$ theo chuỗi Fourier trong một đoạn nào đó, nghĩa là chuỗi mà các số hạng là các hàm lượng giác:

1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, ...

Bây giờ ta xét bài toán tổng quát hơn: khai triển hàm $f(x)$ theo một hệ hàm: $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... , $\varphi_n(x)$... trong một miền nào đó. Bài toán này thường gặp trong vật lý toán học.

5.1. Không gian $L_2'[a, b]$

Trong đại số, ta biết rằng:

Trong không gian tuyến tính L trên trường số thực R, ta xác định ánh xạ $g: L \times L \to R$, nghĩa là ảnh của mỗi cặp phần tử có thứ tự $(f, \varphi) \in L \times L$: $g(f, \varphi)$ là một số thực, ký hiệu (f, φ), người ta gọi ***(f, φ) là tích vô hướng của các phần tử $f, \varphi \in L$ nếu nó thỏa mãn các tính chất (tiên đề):***

1) $\forall f, \varphi \in L: (f, \varphi) = (\varphi, f)$

2) $\forall f \in L: (f, f) \geq 0$, $(f, f) = 0$ chỉ khi $f = 0$

3) $\forall f, \varphi \in L$, $\forall \lambda \in R: (\lambda f, \varphi) = \lambda(f, \varphi)$

4) $\forall f_1, f_2, \varphi \in L: (f_1 + f_2, \varphi) = (f_1, \varphi) + (f_2, \varphi)$.

Không gian tuyến tính L trong đó có xác định một tích vô hướng, gọi là một không gian Euclide.

Bây giờ xét hai hàm f, φ khả tích (Riemann) trên $[a, b]$, ta gọi chúng là *tương đương* nếu:

$$\int_a^b (f - \varphi)^2 dx = 0$$

Cho I là tập hợp các lớp hàm tương đương (khả tích Riemann trên $[a, b]$). Rõ ràng I là một không gian tuyến tính.

Trong I, ta xác định số:

$$(f, \varphi) = \int_a^b f.\varphi dx, \quad \forall f, \varphi \in I \qquad (1)$$

Rõ ràng số này thỏa mãn các tính chất $1 \to 4$ của tích phân vô hướng.

Vậy (f, φ) là một tích vô hướng trong I và không gian tuyến tính I trong đó có xác định tích vô hướng (1) là một không gian Euclide, ký hiệu là $\dot{L}_2 = \dot{L}_2[a,b]$.

Chú ý:

Không gian của các hàm số mà bình phương khả tích Lebesgue trên $[a, b]$, ký hiệu $L_2[a, b]$. Rõ ràng $L_2'[a,b]$ là một không gian con của $L_2[a, b]$. Ta biết trong không gian Euclide bất kỳ ta có bất đẳng thức Buniakovsky – Schwarz.

$$|(f, \varphi)| \leq (f,f)^{\frac{1}{2}}.(\varphi,\varphi)^{\frac{1}{2}}.$$

Áp dụng vào $L_2'[a,b]$ ta có:

$$\int_a^b f(x).\varphi(x)dx \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b \varphi^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Cho một không gian tuyến tính L, ta gọi norme hay chuẩn của f $\subset$ L là một số thực, ký hiệu $\|f\|$ thỏa mãn các tính chất (tiên đề):

1) $\|f\| > 0$, $\forall f \in L$, $\|f\| = 0$ chỉ khi $f = 0$.

2) $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$, $\forall f \in L$, $\forall \lambda \subset R$.

3) $\|f + \varphi\| \leq \|f\| + \|\varphi\|$ (Bất đẳng thức Minkowsky).

Một không gian tuyến tính trong đó có xác định một norme gọi là một không gian định chuẩn.

Nếu L là một không gian Euclide với tích vô hướng (f, φ) thì hàm $\sqrt{(f,f)}$, $\forall f \in L$, thỏa mãn các tính chất 1) -3) của norme, do đó nó là norme của f trong L.

$\|f\|_L = \sqrt{(f,f)}$ cũng gọi là norme của f sinh bởi tích vô hướng (f, φ). Vậy theo định nghĩa: norme sinh bởi tích vô hướng trong L_2' là:

$$\|f\|_{L_2'} = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Từ tính chất 2 của norme, suy ra:

$$\left(\int_a^b [f(x)+\varphi(x)]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b \varphi^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Cho L là một không gian định chuẩn.

Dãy $(f_n) \subset L$ gọi là hội tụ về $f \in L$ theo norme nếu:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_L = 0$$

Đặc biệt, $(f_n) \subset L_2$ hội tụ theo norme về $f \in L_2$ nếu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Sự hội tụ theo norme trong L_2 cũng gọi là sự hội tụ theo trung bình bình phương.

Rõ ràng sự hội tụ đều của một dãy hàm khả tích kéo theo sự hội tụ theo trung bình bình phương của dãy, nhưng điều ngược lại nói chung không đúng.

5.2. Chuỗi Fourier trong không gian định chuẩn

Định nghĩa 1:

Cho L là một không gian định chuẩn. Ta nói rằng chuỗi $f_1 + f_2 + \dots f_n + \dots$ với $f_n \subset L$ hội tụ theo norme về hàm $f \in L$ nếu dãy các tổng riêng của chuỗi $S_n = f_1 + f_2 + \dots f_n$ hội tụ theo norme về $f(x)$, nghĩa là:

$$\|f - S_n\|_L \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Khi đó f gọi là tổng của chuỗi và ta viết:

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$$

Từ đây, ta chỉ xét L là một không gian Euclide định chuẩn $\|f\|_L = \sqrt{(f, f)}$: norme của f sinh bởi tích vô hướng (f, f)).

Định nghĩa 2:

Hai phần tử, $f, \varphi \subset L$ gọi là trực giao nếu $(f, \varphi) = 0$

Một dãy các phần tử của L: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \dots$ gọi là một hệ trực giao nếu $(\varphi_k, \varphi_l) = 0$, $k \neq l$, $(k, l = 1, 2, \dots)$, gọi là một hệ trực chuẩn nếu:

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad k \neq l \\ 1 & \text{nếu} \quad k = l \end{cases}$$

(δ_{kl} gọi là ký hiệu Kronecker), nghĩa là $\|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{\frac{1}{2}} = 1$

Rõ ràng một hệ trực giao $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, $\|\varphi_n\| \neq 0$, $(n = 1, 2, \dots)$ có thể đưa về hệ trực chuẩn:

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots \text{ với } \psi_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}, \ (n = 1, 2, \dots)$$

Ta biết trong một không gian Euclide n chiều, một hệ n vecteur trực giao là độc lập tuyến tính, hệ đó là một cơ sở của không gian.

Trong không gian L, ta sẽ xét các điều kiện để một dãy phần tử của không gian tạo thành một cơ sở của không gian.

Định nghĩa 3: ***Cho hệ trực giao $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \dots$ (1) $\varphi_n \in L$, $\|\varphi_n\| \neq 0$, $\forall f \subset L$, số $\frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \cdot (f, \varphi)$ gọi là hệ số Fourier của f đối với φ_n hay thành phần của f đối với φ_n và chuỗi:***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \cdot (f, \varphi_n) \varphi_n$$

gọi là chuỗi Fourier của hàm f đối với hệ (1). Nếu hệ (1) là trực chuẩn thì hệ số Fourier của f đối với φ_n là (f, φ_n) và chuỗi Fourier của f đối với hệ (1) là:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\varphi_n$$

Một bài toán được đặt ra là: với điều kiện nào thì chuỗi Fourier của hàm f hội tụ về f hay có tổng là f trong không gian L?.

Khái niệm chuỗi Fourier của hàm f đối với hệ trực giao (1) trong không gian L là mở rộng một cách tự nhiên khái niệm biểu thị một vecteur là một tổ hợp tuyến tính của các vecteur của một cơ sở trong một không gian Euclile hữu hạn chiều.

Hệ hàm (1) thỏa mãn các điều kiện để chuỗi Fourier của f hội tụ về f cũng gọi là một cơ sở của không gian "vô số chiều".

Để giải quyết bài toán đặt ra, lần lượt ta có:

Định lý 1:

Nếu dãy hàm $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \ldots$ là một hệ trực chuẩn trong không gian L thì $\forall f \in L$, ta có bất đẳng thức:

$$\sum_{i=1}^{n}(f,\varphi_i)^2 \leq (f, f) = \|f\|^2$$

gọi là bất đẳng thức Bessel.

Chứng minh:

Theo định nghĩa của norme và tính chất của tích vô hướng ta có:

$$\forall n \in N.\ 0 \leq \left\|f - \sum_{i=1}^{n}(f,\varphi_i)\varphi_i\right\|^2 = (f - \sum_{i=1}^{n}(f,\varphi_i)\varphi_i, f - \sum_{i=1}^{n}(f,\varphi_i)\varphi_i)$$

$$= (f, f) - \sum_{i=1}^{n}(f,\varphi_i)^2$$

Do đó ta có bất đẳng thức Bessel.

Đặt $c_i = (f, \varphi_i)$, ($i = 1, 2, \ldots, n$) thì bất đẳng thức Bessel viết được dưới dạng:

$$c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 \le (f, f)$$

Cho $n \to \infty$ thì tổng ở vế trái bất đẳng thức này là một chuỗi dương. Chuỗi này hội tụ về vế phải của bất đẳng thức Bessel không phụ thuộc n. Vậy

$$c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 + \ldots \le (f, f) = \|f\|^2$$

Bất đẳng thức này gọi là bất đẳng thức Parseval.

Định nghĩa 4.

Một hệ trực chuẩn các phần tử của không gian L:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots.$$

gọi là một hệ đầy đủ trong L, nếu $\forall f \in L$ ta có đẳng thức Parseval.

$$c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 + \ldots = \|f\|^2$$

với

$$c_n = (f, \varphi_n), (n = 1, 2, \ldots)$$

Định lý 2.

Hệ trực chuẩn $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$. (1) trong không gian L là một hệ đầy đủ trong L khi và chỉ khi:

$$\forall f \in L: \|f - S_n\| \to 0 \text{ khi } n \to \infty$$

trong đó

$$S_n = c_1\varphi_1, c_2\varphi_2, \ldots, c_2\varphi_n, \quad (c_i = (f_i, \varphi_i), i = 1, 2, \ldots, n)$$

là tổng riêng thứ n của chuỗi Fourier của f đối với hệ (1).

Chứng minh:

$\forall n \in N$, xét:

$$\|f - S_n\|^2 = \left\|f - \sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} C_i^2$$

khi $n \to \infty$, vế phải của đẳng thức này dần đến số: $\|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} C_i^2$, nếu hệ (1) là đầy đủ, theo đẳng thức Parseval thì số này bằng không. Do đó, $\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\| = 0$.

Ngược lại nếu $\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\| = 0$, thì $\|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} C_i^2 = 0$ hay $\sum_{i=1}^{n} C_i^2 = \|f\|^2$ (đẳng thức Parseval), theo định nghĩa, hệ (1) là đầy đủ.

Từ định lý 2 suy ra ***nếu hệ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ là một hệ trực giao đầy đủ trong không gian L thì chuỗi Fourier của $f \in L$ đối với hệ đó hội tụ theo norme về f trong L:***

$$f = \sum_{i=1}^{n} C_n\varphi_n, \text{ với } C_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$$

Đặc biệt trong L_2 [a, b] thì:

$$C_n = \frac{\int_a^b f(x), \varphi_n(x)\,dx}{\left(\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}}$$

và chuỗi Fourier của f hội tụ về f theo trung bình bình phương:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b (f - S_n)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

5.3. Sự hội tụ theo norme của chuỗi Fourier theo các dãy hàm đặc biệt $\subset L_2$ [a, b]

a) Chuỗi lượng giác

Xét dãy hàm 1, cos$x$, sin$x$, cos$2x$, sin$2x$, ... (1) trong không gian L_2 [-π,π].

Theo bổ đề ở (2.1), định lý 2 ở mục trước và chú ý sau §3 thì hệ (1) là một hệ trực giao đầy đủ. Do đó chuỗi Fourier của $f \in L_2[-\pi,\pi]$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

với

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \ \ (n = 1, 2, \dots n)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \ \ (n = 1, 2, \dots n)$$

là hội tụ theo norme về f.

b) Chuỗi theo các hàm đặc biệt khác

Đầu tiên ta mở rộng khái niệm trực giao. Xét $L_2[a, b]$. Ta gọi các hàm $\varphi(x)$, $\psi(x)$ là trực giao với hàm trọng lượng hay trọng lượng $\rho(x)$, ($\rho(x) > 0$) trên $[a, b]$ nếu:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\rho(x)dx = 0$$

Nghĩa là nếu $\varphi(x)\sqrt{\rho(x)}$ và $\psi(x)\sqrt{\rho(x)}$ là trực giao theo nghĩa thông thường. Khái niệm trực giao theo trọng lượng không làm thay đổi kết quả đã xét ở phần trước.

Sau đây là một số đa thức đặc biệt, trực giao theo trọng lượng $\rho(x)$.

1) Các đa thức Tchebichef

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x)$$

trực giao trên (-1, 1) với trọng lượng $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\int_{1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad m \neq n \\ 2^{\frac{\pi}{2n-1}} & \text{nếu} \quad m = n \end{cases}$$

2) Các đa thức Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

trực giao trên [-1, 1] với trọng lượng $\rho(x) = 1$:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{nếu} \quad m = n \end{cases}$$

3) Các đa thức Abel - Laguerre

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \cdot \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}$$

trực giao trên $(0, +\infty)$ với trọng lượng $\rho(x) = e^{-x}$:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} L_n(x)L_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad m \neq n \\ 1 & \text{nếu} \quad m = n \end{cases}$$

4) Các đa thức Tchebichef – Hermite

$$H_n(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{n!} \cdot \frac{d^n e^{\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$$

trực giao trên $(-\infty, +\infty)$ với trọng lượng $\rho(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} H_n(x)H_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad m \neq n \\ \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2} & \text{nếu} \quad m = n \end{cases}$$

Do tính trực giao của các hệ hàm trên, nên người ta cũng đặt vấn đề khai triển hàm $f \in L_2'[a, b]$ theo chuỗi Fourier của các hệ hàm đó.

Thí dụ:

Khai triển hàm $f(x) = x^3$ $(-1 < x < 1)$ theo các đa thức Tchebichef

Giả sử: $$x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_n(x)$$

Ta có:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi C_n}{2^{2m-1}}$$

Đặt $\arccos x = t$.

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -dt$$

$$C_m = \frac{2^m}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^3 t \cos mt dt = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m \neq 1,\ m \neq 3 \\ \dfrac{3}{4} & \text{nếu } m = 1 \\ 1 & \text{nếu } m = 3 \end{cases}$$

$$C_0 = \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \text{ (hàm lẻ)}$$

Vậy $x^3 = \dfrac{3}{4} T_1(x) + T_3(x)$, $x \in (-1, 1)$.

*§6. TÍCH PHÂN FOURIER

6.1. Hàm khả tích tuyệt đối

Hàm f(x) xác định $\forall x \in R$ gọi là khả tích tuyệt đối trên R nếu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | f(x) | dx \text{ hội tụ}$$

Thí dụ:

$f(x) = \dfrac{\sin \alpha x}{1 + x^2}$ là khả tích tuyệt đối trên R vì

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin \alpha x}{1 + x^2} \right| dx \le \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \pi$$

6.2. Tích phân Fourier

Cho $f(x)$ là một hàm khả tích tuyệt đối trên R và khai triển được theo chuỗi Fourier trên $[-l, l]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x), \quad w_n = \frac{\pi n}{l}$$

với:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos w_n t dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots n)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin w_n t dt \quad (n = 1, 2, \ldots n)$$

Thay các hệ số Fourier vào chuỗi ta có:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{l}^{l} f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t)[\cos w_n t \cos w_n x + \sin w_n t \sin w_n x] dt$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \cos w_n (t - x) dt \qquad (1)$$

Theo giả thiết $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dt = k \quad (k \in R)$

Do đó:

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) dt \right| \le \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} |f(t)| dt \le \frac{k}{2l} \to 0 \text{ khi } l \to +\infty.$$

Đặt $\Delta w_n = w_{n+1} - w_n = \dfrac{\pi}{l}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ $\Delta w_n \to 0$ khi $l \to +\infty$

Khi đó tổng còn lại của (1) viết được:

$$\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos w_n(t-x)dt = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta w_n\int_{-l}^{l} f(t)\cos w_n(t-x)dt .$$

Ta coi vế phải như tổng tích phân của hàm:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos w(t-x)dt$$

trong $[0, +\infty)$.

Vậy cho $l \to +\infty$ ta có:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} dw\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos w(t-x)dt \qquad (2)$$

Định nghĩa:

Tích phân ở vế phải của (2) gọi là tích phân Fourier của hàm $f(x)$ trên R.

Tương tự như đối với chuỗi Fourier ta có:

Định lý:

Nếu f là một hàm khả tích tuyệt đối trên R tại $x \in R$, tồn tại các giới hạn một phía:

$$f(x^-),\ f(x^+),\ \lim_{h\to+0}\frac{f(x-h)-f(x^-)}{-h},\ \lim_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x^+)}{h}$$

thì tích phân* Fourier *của $f(x)$ hội tụ về hay bằng:

$$\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$$

Đặc biệt nếu thêm: $f(x)$ là liên tục và có đạo hàm một phía tại x thì ta có (2):

vì: $\cos wx(t - x) = \cos wt \cos wx + \sin wt \sin wx$ nên (2) viết được:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos wx dw \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos wt dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin wx dw \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin wt dt \qquad (3)$$

Đặt

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos wt dt \; ; \; B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin wt dt \qquad (4)$$

thì:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [A(w)\cos wx dw + B(w)\sin wx] dw \qquad (5)$$

Công thức này cho khai triển của $f(x)$ trên R thành những dao động điều hòa mà tần số biến thiên liên tục từ $0 \to +\infty$.

6.3. Tích phân Fourier của các hàm chẵn và lẻ

Nếu $f(x)$ là hàm chẵn, từ (4), ta có:

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\cos wt dt \; , \; B(w) = 0.$$

Khi đó theo (3), tích phân Fourier của f là:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos wx dw \int_0^{+\infty} f(t)\cos wt dt \qquad (6)$$

Nếu $f(x)$ lẻ thì tương tự ta có:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin wx dw \int_0^{+\infty} f(t)\sin wt dt \qquad (7)$$

Chú ý:

Nếu hàm $f(x)$ chỉ xác định trên $(0, +\infty)$ thì có thể kéo dài chẵn hoặc lẻ $f(x)$ ra $(-\infty, 0)$ và ta có tích phân Fourier của $f(x)$ dưới những dạng khác nhau của hàm $f(x)$.

Thí dụ:

Khai triển theo tích phân Fourier

1) $f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{nếu} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \textit{nếu} \quad x > 1 \end{cases}$

Kéo dài chẵn, ta có:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos wx dw \int_0^1 \cos wt dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} dw$$

Do đó

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} dw = \begin{cases} 1 & \textit{nếu} \quad -1 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{2} & \textit{nếu} \quad x = \pm 1 \\ 0 & \textit{nếu} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

Nếu kéo dài lẻ ta có:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \sin wx dw \int_0^1 \sin wt dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin wx(1 - \cos wx)}{w} dw$$

2) $f(x) = e^{-bx}$, $x > 0$

Kéo dài chẵn ta có:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos wx dw \int_0^{+\infty} e^{-bt} \cos wt dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{b}{w^2 + b^2} \cos wx dw$$

Kéo dài lẻ ta có:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \sin wx dw \int_0^{+\infty} e^{-bt} \sin wt dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{w}{w^2 + b^2} \sin wx dw$$

6.4. Tích phân Fourier dưới dạng phức – Biến đổi Fourier

Theo các công thức Euler thì công thức (5) viết được:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [A(w)\frac{e^{iwx} + e^{-iwx}}{2} + B(w)\frac{e^{iwx} - e^{-iwx}}{2i}]dw$$

hay:

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \{[A(w) - iB(w)]e^{iwx} + [A(w) + iB(w)]e^{-iwx}\}dw$$

Đặt

$$F(w) = \pi[A(w) - iB(w)]$$

Theo các công thức (4) ta có:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos wt - i\sin wt)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt}dt$$

và

$$\pi[A(w) + iB(w)] = \overline{F(w)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iwt}dt$$

Nếu ký hiệu $\overline{F(w)} = F(-w)$ thì:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} [F(w)e^{iwx} + F(-w)e^{-iwx}]dw$$

Nhưng $\int_0^{+\infty} [F(-w)e^{-iw}d(w) = \int_0^{-\infty} F(w)e^{iw}d(-w) = \int_{-\infty}^{0} F(w)e^{iwx}d(w)$

Do đó:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\infty} F(w)e^{iwx}dw \qquad (8)$$

với

$$F(w) = \int^{-\infty} f(t)e^{-iwt}dt \qquad (9)$$

Định nghĩa: ***Hàm F(w) xác định bởi (9) gọi là biến đổi Fourier của hàm f(x) còn hàm f(x) xác định bởi (8) gọi là biến đổi Fourier ngược của hàm F(w).***

Từ các công thức ở (6), (7) ta có các công thức biến đổi Fourier của hàm chẵn và lẻ

$$F_p(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\cos wt\,dt\,,\quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_p(w)\cos wx\,dw$$

$$F_i(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin wt\,dt\,,\quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_i(w)\sin wx\,dw$$

(p: chẵn, i: lẻ)

cũng gọi là các biến đổi Fourier dưới dạng cos và sin.

Thí dụ:

Cho $f(x) = e^{-ax}$ $(a > 0, x \geq 0)$

Biến đổi Fourier dưới dạng cos của hàm số này là:

$$F_p(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-at}\cos wt\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+w^2}$$

dưới dạng sin là:

$$F_i(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-at}\sin wt\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{aw}{a^2+w^2}$$

Vì e^{-ax} khả tích trên $[0, +\infty)$ nên:

$$\frac{2a}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos wx}{a^2+w^2}\,dw = e^{-ax}\,,\ (x \geq 0)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{w\sin wx}{a^2+w^2}\,dw = e^{-ax}\quad (x > 0)$$

hay

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos wx}{a^2 + w^2} dw = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{w \sin wx}{a^2 + w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-ax}$$

Các tích phân này gọi là các tích phân Laplace

Chú ý:

Theo trên biến đổi Fourier $F(w)$ của hàm $f(x)$ được xác định từ phương trình:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(w) e^{iwt} dw$$

và nghiệm của phương trình này là:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

Phương trình trên gọi là một phương trình tích phân dạng đơn giản (ẩn hàm nằm dưới dấu tích phân).

*§7. ÁP DỤNG CHUỖI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI FOURIER VÀO VẬT LÝ TOÁN

7.1. Bài toán dao động của dây

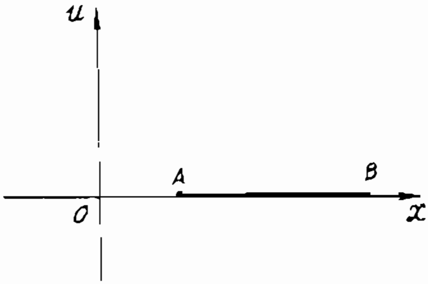
Đầu tiên ta quy ước *dây là một cố thể* mà độ dài có thể giãn ra được so với các kích thước khác và có tính chất đàn hồi. Ta sẽ giải bài toán:

Cho một sợi dây căng giữa hai điểm và xét sự dao động của dây.

Để được đơn giản khi giải bài toán ta đưa ra các giả thiết sau:

1) Dây đồng chất có mật độ khối lượng (dài) là ρ = const, ta căng dây giữa 2 điểm A, B trên trục Ox của hệ tọa độ vuông góc xOu, ở trạng thái cân bằng phương của dây trùng với phương của trục Ox. (H.205)

2) Ngoại lực tác dụng vào dây chỉ là lực ngang có phương song song với trục Ou và có mật độ là một hàm số của x và thời gian t: $g(x, t)$.



Hình 205

3) Dưới tác dụng của lực ngang dây dao động nhỏ và luôn luôn ở trong mặt phẳng xOu. Dựa vào các giả thiết này, trước hết, ta lập phương trình đường uốn của dây. Theo các giả thiết này phương trình đường uốn của dây tại thời điểm t sẽ có dạng $u = u(x, t)$.

Xét một đoạn dây khá nhỏ tùy ý $[x_1, x_2]$, đặt $x_2 - x_1 = dx$ (H.206) ta thấy các lực tác dụng vào đoạn dây này gồm:

Lực quán tính $\vec{Q}$, lực ngang $\vec{F}$ và lực căng $\vec{T}$, theo nguyên lý D'Alambert thì:

$$\vec{Q} + \vec{F} + \vec{T} = 0 \qquad (1)$$

Vì phương trình đường uốn của dây tại thời điểm t có dạng $u = u(x, t)$ nên hệ số góc của tiếp tuyến tại một điểm trên dây sẽ là:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ và gia tốc của 1 điểm trên dây sẽ là } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Do đó, theo giả thiết 1) lực quán tính $\vec{Q}$ có độ lớn là:

$\rho.dx.\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, theo giả thiết 2) phương của nó song song với Ou, cũng theo giả thiết 2) lực ngang $\vec{F}$ có độ lớn là $g(x, t)dx$. Vì đoạn $[x_1, x_2]$ khá nhỏ nên coi: $\vec{T} = \vec{T}(x_2) - \vec{T}(x_1)$. Chiếu (1) lần lượt xuống Ox, Ou thì ta có:

$$0 + T\cos\alpha\Big|_{x=x_2} - T\cos\alpha\Big|_{x=x_1} + 0 = 0 \qquad (2)$$

$$-\rho.dx.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + T\sin\alpha\Big|_{x=x_2} - T\sin\alpha\Big|_{x=x_1} + g(x,t)dx = 0 \quad (3)$$

trong đó: $T = |\vec{T}|$.

Vì

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \quad \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

nên theo giả thiết 3) ta coi được $\cos\alpha \approx 1$, $\sin\alpha \approx tg\alpha = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ do đó đẳng thức (2) viết được:

$$T\Big|_{x=x_2} - T\Big|_{x=x_1} = 0 \text{ hay } T(x_1) = T(x_2)$$

nghĩa là độ lớn của lực căng không đổi theo x, mặt khác dây có tính đàn hồi, theo định luật Hooke ($T = kx$) lực căng không đổi theo t; như vậy $T = T_0 =$ const.

Do đó:

$$T\sin\alpha\Big|_{x=x_2} - T\sin\alpha\Big|_{x=x_1} = T_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1}\right)$$

Đặt $x_1 = x$ thì

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1} \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(theo công thức $\Delta y \approx dy$).

Lúc đó

$$T\sin\alpha\big|_{x=x_2} - T\sin\alpha\big|_{x=x_1} \approx T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx.$$

và đẳng thức (3) viết được

$$-\rho dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + g(x,t)dx = 0$$

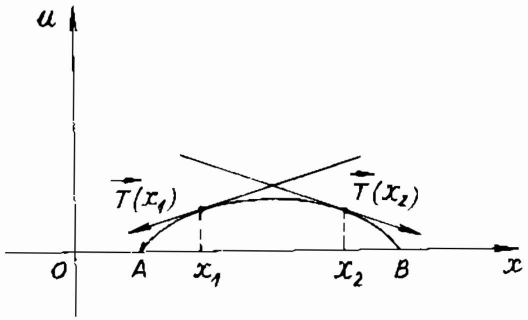
hay

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + G(x,t) \qquad (4)$$

trong đó $a = \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}},\quad G(x,t) = \dfrac{g(x,t)}{\rho}$

Nếu G(x, t) = 0 nghĩa là không có ngoại lực thì ta có:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \qquad (5)$$



Hình 206

Các phương trình (4) và (5) vừa lập để xác định phương trình đường uốn hay độ lệch của dây tại một thời điểm trong trường hợp có ngoại lực và không có ngoại lực gọi là phương trình dao động cưỡng bức và dao động tự do của dây, chúng không phải là phương trình vi phân thường mà là phương trình vi phân có chứa các đạo hàm riêng gọi là phương trình vi phân đạo hàm riêng, vì nội dung gắn liền với các bài toán vật lý nên người ta cũng gọi chúng là các phương trình vật lý toán học.

Các phương trình này được lập từ thế kỷ 18, nên thuộc loại các phương trình vật lý cổ điển, chúng nó rất nhiều ứng dụng trong thực tiễn.

Để xét dao động của dây, ta phải đặt bài toán để giải các phương trình đó.

Ta chỉ xét trường hợp dao động tự do nghĩa là xét phương trình (5) và giả sử dây đó dài l, gắn chặt các đầu $x = 0$, $x = l$. Vì dây gắn chặt các đầu nên ta phải đưa vào điều kiện.

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 \qquad (6)$$

Ngoài ra phải cho độ lệch và tốc độ ban đầu của dây:

$$u\big|_{t=0} = f(x) \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x) \qquad (7)$$

Vậy để xét dao động tự do của dây gắn chặt các đầu ta phải giải phương trình (5) thỏa mãn các điều kiện (6) và (7). ***Người ta gọi điều kiện (6) và (7) là biên kiện và sơ kiện và bài toán (5), (6), (7) gọi là bài toán hỗn hợp đối với phương trình dao động tự do của dây.***

Ta sẽ dùng phương pháp tách biến số và áp dụng chuỗi Fourier, cũng gọi là phương pháp Fourier để giải bài toán này.

Ta tìm nghiệm của (5) dưới dạng:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \qquad (8)$$

Đạo hàm thay vào (5) ta có:

$$XT' = a^2X''T \text{ hay } \frac{1}{a^2}.\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \qquad (9)$$

Đẳng thức (9) có với mọi x và t, mà vế phải chỉ phụ thuộc x, vế trái chỉ phụ thuộc t, do đó 2 vế phải cùng bằng 1 hằng số:

$$\frac{1}{a^2}.\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = C \quad (C = \text{const})$$

hay

$$X''(x) - CX(x) = 0 \qquad (10)$$

$$T'(t) - Ca^2T(t) = 0 \qquad (11)$$

Đó là 2 phương trình để xác định X và T.

Bây giờ cho (8) thỏa mãn điều kiện (6) ta được.

$$u\big|_{x=0} = X(0)T(t) = 0, \quad u\big|_{x=l} = X(l)T(t) = 0$$

Do đó $\qquad X(0) = 0, X(l) = 0 \qquad (12)$

Như vậy X phải là nghiệm của (10) với biên kiện (12).

Bài toán này với mọi C, có nghiệm tầm thường $X(x) \equiv 0$.

Ta tìm nghiệm không tầm thường như sau:

Phương trình đặc trưng của (10) là: $k^2 - C = 0$.

Xét các trường hợp có thể xảy ra:

a) $C = \lambda^2 > 0$, lúc đó $k = \pm\lambda$ và nghiệm tổng quát của (10) là:

$$X(x) = C_1e^{\lambda x} + C_2e^{-\lambda x}$$

Cho thỏa mãn (12) ta có hệ:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1e^{\lambda l} + C_2e^{-\lambda l} = 0 \end{cases} \text{ vì } \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda l} & e^{-\lambda l} \end{vmatrix} \neq 0$$

nên hệ này có nghiệm duy nhất: $C_1 = C_2 = 0$, do đó $X(x) \equiv 0$ tức là trong trường hợp này bài toán cũng chỉ có nghiệm tầm thường.

b) $C = 0$, lúc đó (10) viết được: $X'' = 0$ suy ra $X = C_1 + C_2x$ theo (12) ta có $C_1 = C_2 = 0$ và $X(x) \equiv 0$, nghĩa là trong trường hợp này bài toán lại cũng có nghiệm tầm thường.

c) $C = -\lambda^2 < 0$, lúc đó $k = \pm \lambda i$ và nghiệm tổng quát của (10) là:

$$X(x) = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x.$$

Cho thỏa mãn (12) ta có:

$$X(0) = C_1 = 0, X(l) = C_2\sin\lambda l = 0$$

Giả sử $C_2 \neq 0$ (vì nếu không thì lại chỉ có nghiệm tầm thường $X(x) = 0$) thì $\sin\lambda l = 0$ hay $\lambda l = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$) suy ra: $\lambda = \frac{k\pi}{l}$ như vậy λ phụ thuộc k, ký hiệu $\lambda = \lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, lúc đó $C = -\lambda_k^2 = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ và ta được nghiệm: $X(x) = C_2\sin\frac{k\pi x}{l}$

Ta thấy $X(x)$ phụ thuộc k nên đặt $C_2 = A_k$ và ký hiệu:

$$X = X_k = A_k \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (13)$$

Ta chỉ lấy k là các số nguyên dương: $k = 1, 2, ...$ vì $k < 0$ thì do A_k là hằng số tùy ý nên nhập dấu trừ vào A_k ta lại có $k > 0$, còn $k = 0$ thì $X_0 = 0$ là nghiệm tầm thường.

Khi $\lambda = \lambda_k = \frac{k\pi}{l}$ thì $T(t)$ sẽ phụ thuộc k, ký hiệu $T(t) = T_k(t)$ và (11) viết được:

$$T_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t) = 0 \text{ (vì } C_k = -\lambda_k^2\text{)}$$

phương trình này có nghiệm tổng quát là:

$$T_k(t) = B_k\cos\frac{k\pi at}{l} + D_k\sin\frac{k\pi at}{l} \quad (14)$$

B_k, D_k là các hằng số tùy ý.

Theo (8), (13), (14) thì u sẽ phụ thuộc k, đặt $u = u_k$ thì

$$u_k(x, t) = (B_k\cos\frac{k\pi at}{l} + D_k\sin\frac{k\pi at}{l})A_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

đặt $a_k = A_kB_k$, $b_k = A_kD_k$ (cũng là những hằng số tùy ý) thì

$$u_k(x, t) = (a_k\cos\frac{k\pi at}{l} + b_k\sin\frac{k\pi at}{l}) \sin\frac{k\pi x}{l} \quad (15)$$

Số $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$ gọi là giá trị riêng và nghiệm $u_k(x, t)$ gọi là hàm riêng của bài toán (5), (6) nó biểu diễn dao động tương ứng của dây, gọi là dao động riêng.

Như vậy dao động của dây gồm vô số dao động riêng (vì k = 1, 2, 3, ...). Để xét toàn bộ quá trình dao động của dây, ta phải xét chuỗi:

$$\boldsymbol{u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{k\pi at}{l} + b_k\sin\frac{k\pi at}{l}) \sin\frac{k\pi x}{l}} \quad (16)$$

Dễ dàng thấy (16) thỏa mãn (5), (6) nếu chuỗi hội tụ đều và đạo hàm được hai lần theo x và t.

Bây giờ ta xác định các hằng số tùy ý a_k, b_k thì từ sơ kiện (7), ta có:

$$u\Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l} = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} . b_k \sin\frac{k\pi x}{l} = F(x)$$

Giả sử các hàm $f(x)$, $F(x)$ khai triển được theo chuỗi Fourier trong khoảng $[0, l]$ thì các đẳng thức này chứng tỏ a_k và $\frac{k\pi a}{l}b_k$ là các hệ số Fourier trong khai triển hàm $f(x)$ và $F(x)$ trên $[0, l]$.

Do đó theo các công thức xác định hệ số Fourier thì:

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx; \quad b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \qquad (17)$$

Từ chú ý 3, ở §2, có thể chứng minh rằng:

Nếu:

1) Hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp hai, có đạo hàm cấp ba liên tục từng phần trên $[0, l]$ và $f(0) = f(l)$, $f''(0) = f''(l) = 0$.

2) Hàm $F(x)$ có đạo hàm cấp một liên tục, có đạo hàm cấp hai liên tục từng phần trên $[0, l]$ và $F(0) = F(l) = 0$ thì $u(x, t)$ xác định bởi chuỗi (16) trong đó a_k, b_k xác định bởi các công thức (17) là nghiệm của bài toán (5), (6), (7).

Bây giờ xét dao động thứ k của dây ứng với hàm riêng

$$u_k = \left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l} + b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

hàm này có thể viết

$$u_k = F_k\sin\frac{k\pi x}{l}.\sin\left(\frac{k\pi at}{l} + \varphi_k\right) \qquad (18)$$

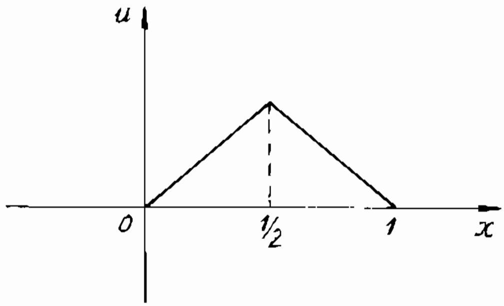
Trong đó $F_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $\varphi_k = \operatorname{arctg}\frac{a_k}{b_k}$, a_k, b_k xác định bởi (17).

Từ (18) ta thấy: dao động riêng thứ k của dây là một dao động điều hòa với tần số: $w_k = \frac{k\pi a}{l}$ pha ban đầu là φ_k và biên độ phụ thuộc x; $F_k\sin\frac{k\pi x}{l}$.

Thí dụ:

Xét dao động tự do của dây có độ dài $l = 1$, gắn chặt các đầu $x = 0$, $x = l$ và độ lệch ban đầu cho bởi:

$$u\Big|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 1 - x & \text{nếu } \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases} \quad \text{(H.207)}$$



Hình 207

Còn tốc độ ban đầu: $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x) = 0$

Theo (17) ta có: $b_k = 0$.

$$a_k = 2[\int_0^{\frac{1}{2}} x \sin k\pi x dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1 - x)\sin k\pi x dx$$

$$= 2[-x\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos k\pi x}{k\pi}dx + (1 - x)\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\cos k\pi x}{k\pi}dx]$$

$$= 2[\frac{1}{k^2\pi^2}\sin k\pi x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{k^2\pi^2}\sin k\pi x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}]$$

$$= 2\left[-\frac{1}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} + \frac{1}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}\right] = \frac{4}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^m.4}{(2m+1)^2\pi^2} & \textit{nếu} \quad k = 2m+1, \quad m = 0,1,2... \\ 0 & \textit{nếu} \quad k = 2m, \quad m = 1,2... \end{cases}$$

Do đó theo (16) ta có:

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}\sin(2m+1)\pi x\cos(2m+1)\pi at$$

Theo sơ kiện khi $t = 0$, $x = \frac{1}{2}$ thì $u = \frac{1}{2}$, do đó ta suy ra:

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \quad \text{hay} \quad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}$$

Từ công thức nghiệm ta thấy độ lệch cực đại khi:

$$\sin(2m+1)\pi x = 1, \quad \cos(2m+1)\pi at = 1.$$

hay $\qquad x = \frac{1}{2}$ và $t = 0$:

$$U_{max} = \frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2}.$$

Như vậy độ lệch cực đại khi dao động cũng bằng độ lệch ban đầu.

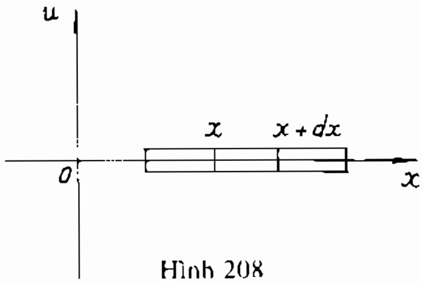
7.2. Bài toán truyền nhiệt trong thanh

Ta quy ước thanh là một số cố thể mà các kích thước khác là nhỏ so với chiều dài của nó. Ta sẽ giải bài toán: cho một thanh nào đó, xét sự truyền nhiệt trong thanh đó. Để giải bài toán được đơn giản, ta đưa ra các giả thiết:

1) Thanh đồng chất, mật độ khối lượng (dài) là ρ, hệ số truyền nhiệt là k, nhiệt dung là c, tiết diện ngang của thanh là s là những đại lượng không đổi.

2) Đặt thanh trùng với một đoạn trên trục Ox của hệ tọa độ vuông góc xOu (H.208).

3) Trong thanh có nguồn nhiệt, mật độ phụ thuộc x và thời gian t: $F(x, t)$ và mặt bên của thanh là cách nhiệt.



Hình 208

Gọi u là nhiệt độ của thanh thì u sẽ phụ thuộc x và thời gian t:

$$u = u(x, t).$$

Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm thì tốc độ truyền nhiệt theo trục Ox sẽ là: $\dfrac{\partial u}{\partial x}$. Dựa vào các giả thiết trên, đầu tiên ta lập phương trình để xác định u. Xét một đoạn khá nhỏ $[x, x + dx]$ theo nguyên lý cân bằng nhiệt thì: biến thiên nhiệt lượng của đoạn thanh bằng tổng nhiệt lượng qua đoạn thanh và nhiệt lượng do nguồn nhiệt phát ra trong thanh. Ta xét một khoảng thời gian khá nhỏ dt thì:

Biến thiên nhiệt lượng của đoạn thanh trong thời gian dt là:

$$u(x, t + dt) - u(x, t) \approx \frac{\partial u}{\partial x} dt$$

và nhiệt lượng cần thiết để có sự biến thiên đó là:

$$c\rho dx \frac{\partial u}{\partial x} dt.$$

Theo định luật Fourier nhiệt lượng qua thiết diện tại x trong thời gian dt là:

$$-KS\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dt$$

và nhiệt lượng qua thiết diện tại $x + dx$ cũng trong thời gian dt là:

$$- KS\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x}dt$$

do đó nhiệt lượng qua đoạn thanh trong thời gian dt là:

$$KS[\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}]dt \approx KS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdt.$$

Cuối cùng nhiệt lượng do nguồn nhiệt phát ra từ đoạn thanh trong thời gian dt là: $Fdxdt$.

Vậy theo nguyên lý cân bằng nhiệt, ta có:

$$c\rho dx\frac{\partial u}{\partial t}dt = KS\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dxdt + F.dx.dt$$

hay

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t) \qquad (1)$$

trong đó: $a = \sqrt{\frac{ks}{c\rho}}$, $g = \frac{1}{c\rho}F$

Đặc biệt nếu không có nguồn nhiệt $g = 0$ thì ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2)$$

Các phương trình (1) và (2) vừa lập để xác định nhiệt độ u của thanh gọi là các phương trình truyền nhiệt trong thanh trong trường hợp có nguồn nhiệt và không có nguồn nhiệt. Đó là phương trình đạo hàm riêng, cũng là các phương trình vật lý toán thuộc loại cổ điển.

Bây giờ ta đặt bài toán đối với các phương trình đó.

Xét trường hợp thanh có độ dài l, $0 \le x \le l$ và 2 đầu của thanh cách nhiệt.

Vì 2 đầu của thanh cách nhiệt, nên tốc độ truyền nhiệt theo hướng của trục Ox tại các đầu đó phải bằng không, nghĩa là ta phải đưa vào biên kiện

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0 \tag{3}$$

Ngoài ra còn phải cho nhiệt độ ban đầu của thanh nghĩa là phải đưa vào sơ kiện:

$$u\big|_{t=0} = f(x) \tag{4}$$

Bài toán tìm nghiệm của phương trình (1) hoặc (2) thỏa mãn biên kiện (3) và sơ kiện (4) gọi là bài toán hỗn hợp đối với phương trình truyền nhiệt.

Ta sẽ dùng phương pháp Fourier để giải bài toán này trong trường hợp không có nguồn nhiệt.

Tìm nghiệm của (2) dưới dạng:

$$U(x, t) = X(x).T(t) \tag{5}$$

Đạo hàm, thay vào (2) ta có:

$$T'(t)X(x) = a^2T(t)X''(x)$$

hay $$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

với mọi x và t.

Đẳng thức này chỉ xảy ra khi 2 vế cũng bằng một hằng số c.

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = c$$

hay

$$T'(t) - ca^2T(t) = 0 \tag{6}$$

$$X''(x) - cX(x) = 0 \tag{7}$$

Từ (6) ta có: $T(t) = A\,e^{ca^2t}$, A là hằng số tùy ý. Nhiệt độ của thanh không thể tăng vô hạn khi $n \to \infty$ nên chỉ có thể lấy $c < 0$, đặt $c = -\lambda^2$ ta có:

$$T(t) = A.\ e^{-a^2\lambda^2 t} \qquad (8)$$

và lúc đó phương trình (7) viết được: $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$. Phương trình này có phương trình đặc trưng là: $k^2 + \lambda^2 = 0$. Suy ra $k = \pm i\lambda$ và $X(x) = B\cos\lambda x + D\sin\lambda x$ (9). B, D là những hằng số tùy ý.

Theo (5), (8), (9) ta có:

$$U(x, t) = e^{-a^2\lambda^2 t}(\alpha\cos\lambda x + \beta\sin\lambda x). \qquad (10)$$

trong đó $\alpha = AB$, $\beta = AD$ là những hằng số tùy ý.

Bây giờ cho (10) thỏa mãn biên kiện (3) để xác định λ, ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{a^2\lambda^2 t}(-\alpha\lambda\sin\lambda x + \beta\lambda\cos\lambda x).$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = e^{-a^2\lambda^2 t}(0 + \beta\lambda) = 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = e^{-a^2\lambda^2 t}(-\alpha\lambda\sin\lambda l + \beta\lambda\cos\lambda l) = 0$$

suy ra $\beta = 0$ và $\sin(\lambda l) = 0$ hay $\lambda l = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

Do đó $\lambda = \dfrac{k\pi}{l}$, như vậy λ phụ thuộc k.

Ký hiệu $\lambda = \lambda_k = \dfrac{k\pi}{l}$, lúc đó (10) viết được:

$$U(x, t) = \alpha\cos\frac{k\pi x}{l}\,.\,e^{\frac{-k^2\pi^2 a^2 t}{l^2}} \qquad (11)$$

Ta thấy u phụ thuộc k, đặt $u = U_k$ và $\alpha = a_k$.

Ta có:

$$U_k(x, t) = a_k.\cos\frac{k\pi x}{l}.e^{\frac{k^2\pi^2a^2t}{l^2}}$$

Ta chỉ lấy $k = 0, 1, 2,\ldots$ vì a_k là hằng số tùy ý.

Vậy ta sẽ được vô số nghiệm riêng U_k của bài toán, để xét toàn bộ quá trình truyền nhiệt của thanh, ta xét chuỗi:

$$U(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l}.e^{\frac{-k^2\pi^2a^2t}{l^2}} \qquad (12)$$

Giả sử chuỗi này hội tụ đều và đạo hàm được từng số hạng một lần đối với t và hai lần đối với x thì nó thỏa mãn (2), (3)

Bây giờ cho (12) thỏa mãn sơ kiện (4) để xác định a_k, ta có:

$$U\big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} = f(x) \qquad (13)$$

Giả sử $f(x)$ khai triển được theo chuỗi Fourier dưới dạng cos trong khoảng $[0, l]$ thì đẳng thức (13) chứng tỏ a_k chính là hệ số Fourier trong khai triển đó.

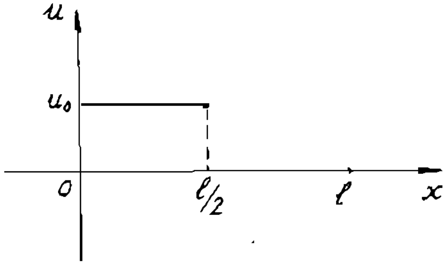
$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx\ ,\ k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (14)$$

Có thể chứng minh nếu $f(x)$ khai triển được theo chuỗi Fourier dưới dạng cos trên $[0, l]$ thì nhiệt độ của thanh tại điểm x và thời điểm t bất kỳ được xác định bởi công thức (12) trong đó a_k được xác định bởi công thức (14).

Thí dụ:

Xét sự truyền nhiệt trong một thanh độ dài l: $0 \le x \le l$ hai đầu cách nhiệt, nhiệt độ ban đầu là:

$$u\big|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} u_0 & \text{nếu } 0 \le x \le \dfrac{l}{2} \\ 0 & \text{nếu } \dfrac{l}{2} < x \le l \end{cases} \qquad \text{(H.209)}$$



Hình 209

Theo (14) ta có:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} u_0 dx = u_0$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} u_0 \cos\frac{k\pi x}{l}dx = \begin{cases} (-1)^m \dfrac{2u_0}{(2m+1)\pi} & \text{nếu } k = 2m+1, \ m = 0,1,2\ldots \\ 0 & \text{nếu } k = 2m, \ m = 1,2\ldots \end{cases}$$

Do đó theo (12) ta có:

$$u(x,\, t) = \frac{u_0}{2} + \frac{2u_0}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{\cos\dfrac{(2m+1)\pi x}{l}}{2m+1} \,.\, e^{\frac{-(2m+1)\pi^2 a^2 t}{l^2}}$$

Suy ra:

$$u\big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{u_0}{2}$$

với mọi t (vì $\cos\dfrac{(2m+1)\pi}{2} = 0$). Khi $t \to \infty$ thì $u \to \dfrac{u_0}{2}$

Thực tế sau một thời gian khá dài thì nhiệt độ của thanh bằng nửa nhiệt độ ban đầu.

7.3. Phương trình Laplace

Ta đã xét các bài toán dao động của dây và truyền nhiệt trong thanh, biểu thị bởi các phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t).$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t)$$

Các phương trình này cũng gọi là *phương trình dao động và truyền nhiệt một chiều* (*trên đường thẳng*).

Tương tự, nếu xét bài toán đó trong mặt phẳng và không gian thì sẽ đi đến các phương trình.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + g(x, y, t) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g(x, y, z, t) \qquad (1')$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + g(x, y, t) \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g(x, y, z, t) \qquad (2')$$

Các phương trình (1,), (1'), ((2) và (2')) gọi là các phương trình dao động hay phương trình truyền sóng (phương trình truyền nhiệt) trong mặt phẳng và không gian. Nếu nghiên cứu các bài toán trên, trong trạng thái dừng (không phụ thuộc thời gian t: $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$) và trạng thái tự do

($g(x, y, t) = 0$, $g(x, y, z, t) = 0$) thì từ các phương trình (1), (2) và (1'), (2') ta có: các phương trình:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Các phương trình này gọi là phương trình Laplace trong mặt phẳng và không gian.

Sau đây ta sẽ xét một bài toán đơn giản đối với phương trình Laplace trong mặt phẳng.

Tìm sự phân bố nhiệt độ trong một đĩa tròn, biết nhiệt độ trên biên của đĩa (trong trạng thái dừng).

Về toán học ta phải giải bài toán:

Tìm hàm u(x, y) thỏa mãn phương trình:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

trong hình tròn bán kính a (1) và điều kiện biên: u = f trên biên của hình tròn (2).

Bài toán (1), (2) gọi là bài toán Dirichlet trong (cũng gọi là một bài toán bờ đối với phương trình Laplace 2 chiều).

Ta biết trong lý thuyết trường, hàm *u* thỏa mãn phương trình Laplace (1) gọi là một *hàm điều hòa*.

Ta sẽ dùng phương pháp tách biến Fourier để giải bài toán (1), (2).

Ta biết phương trình (1) trong tọa độ cực (r, φ) gốc cực 0 là tâm hình tròn, có dạng:

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad (3)$$

Tìm nghiệm của (3) dưới dạng:

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

Thay vào (3) ta được:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0 \qquad (4)$$

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \lambda R = 0 \qquad (5)$$

nghiệm của (4):

$$\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi.$$

Chú ý rằng:

$$u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi)$$

Do đó $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$, nghĩa là $\Phi(\varphi)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π. Vậy ta chỉ có thể lấy $\sqrt{\lambda} = n$ ($n \in Z$) và $\Phi(\varphi) = \Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi$.

Tìm $R(r)$ dưới dạng: $R(r) = r^{\mu}$, thay vào (5) ta được $n^2 = \mu^2$ hay $\mu = \pm n$ $(n > 0)$.

Do đó $\quad R(r) = Cr^n + Dr^{-n}$, $C, D = \text{const}$.

Ta chỉ có thể lấy $R(r) = Cr^n$ $(\mu = +n)$ vì $r^{-n} \to \infty$ khi $r \to 0$, nghiệm tìm được sẽ không bị chặn.

Như vậy nghiệm riêng của bài toán là:

$$u_n(r, \varphi) = r^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) \text{ với } r \le a.$$

và

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

cũng là nghiệm của bài toán nếu chuỗi hội tụ đều.

Để xác định A_n, B_n ta dùng điều kiện (2).

$$u(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f \tag{6}$$

Xét $f = f(\varphi)$ giả sử khai triển được nó theo chuỗi Fourier:

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) \tag{7}$$

với:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)d\varphi, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi \tag{7'}$$

So sánh (6) và (7) ta có:

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}, \ B_n = \frac{\beta_n}{a^n}$$

Vậy:

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) \tag{8}$$

Có thể chứng minh nếu f là một hàm liên tục và khả vi thì chuỗi (8) hội tụ khi $r \le a$.

Vậy nó là nghiệm của bài toán (1), (2).

Chú ý:

Nếu thay α_n, β_n được xác định bởi (7') vào (8) và biến đổi ta sẽ được

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{a^2 - r^2}{r^2 - 2ar\cos(\varphi - t) + a^2}dt \qquad (9)$$

Tích phân (9) gọi là tích phân Poisson. Khi $r = a$ (9) không xác định, tuy nhiên

$$\lim_{\substack{r \to a \\ \varphi \to \varphi_0}} u(r, \varphi) = f(\varphi_0)$$

Vậy tích phân Poisson là liên tục trong hình tròn đóng $r \le a$.

Tóm lại, hàm:

$$u(r, \varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{a^2 - r^2}{r^2 - 2ar\cos(\varphi - t) + a^2}dt & khi \quad r < a \\ f(\varphi) & khi \quad r = a \end{cases}$$

thỏa mãn phương trình $\Delta u = 0$ và liên tục trong miền đóng $r \le a$, nghĩa là nó là nghiệm của bài toán Dirichlet (1), (2) (như đã biết đó là một hàm điều hòa).

Có thể chứng minh, tích phân Poisson cho nghiệm của bài toán (1) (2) chỉ với giả thiết $f(\varphi)$ là liên tục.

7.4. Áp dụng của biến đổi Fourier

Ta đã áp dụng chuỗi Fourier để giải vài bài toán cơ bản trong vật lý toán.

Ta cũng có thể áp dụng biến đổi Fourier để giải một số bài toán vật lý toán học khác.

Thí dụ:

Xét sự truyền nhiệt trong thanh nửa vô hạn biết nhiệt độ ban đầu của thanh và nhiệt độ tại đầu hữu hạn của thanh là không đổi (không có nguồn nhiệt) về toán học, ta giải bài toán:

Tìm hàm u(x, t) thỏa mãn phương trình:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, t > 0 \quad (1)$$

với điều kiện ban đầu $u(x, 0) = 0$, $x > 0$ (2) và điều kiện biên $u(0, t) = u_0$, $t > 0$. (3)

Ta có thể chứng minh: nếu u là nghiệm của bài toán (1) → (3) thì biến đổi Fourier dưới dạng sin của u:

$$u_1 = u_1(w, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(x,t) \sin wx dx \qquad (4)$$

là nghiệm của phương trình vi phân thường.

$$\frac{du_i}{dt} = a^2 (w.\sqrt{\frac{2}{\pi}} u_0 - w^2 u_i) \quad (t > 0) \qquad (5)$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu: $u_1(w, 0) = 0$ (6) với điều kiện: u có các đạo hàm u', u'' trong $[0, +\infty)$ và u, u', u'' khả tích tuyệt đối trong $[0, +\infty)$ (7).

Nghiệm của (5) thỏa mãn (6) là:

$$u_i(w, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{u_0}{w} (1 - e^{-w^2 a^2 t})$$

Theo công thức biến đổi Fourier ngược, ta có:

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} u_0 \int_0^{+\infty} e^{-w^2 a^2 t} \sin wx \frac{dw}{w}$$

Hay

$$u(x, t) = u_0\left(1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-w^2 a^2 t} \sin wx \frac{dw}{w}\right) \tag{8}$$

với:

$$\int_0^{+\infty} \sin wx \frac{dw}{w} = \frac{\pi}{2}$$

Rõ ràng hàm (8) thỏa mãn các điều kiện (2), (3). Vậy nó là nghiệm của bài toán (theo nội dung vật lý của bài toán, ta có thể giả thiết hàm u thỏa mãn (7)).

BÀI TẬP

1. Tìm tổng riêng S_n và tổng S (nếu có) của các chuỗi

1) $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \dfrac{1}{3.4.5} + \dots$

2) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{36} + \dots + \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \cdots$

3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 - 1}$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{5^n}$

*5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1 - x^{2^n}}$, $x \neq \pm 1$

2. Dùng điều kiện Cauchy xét sự hội tụ của các chuỗi

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

2) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...$

3) $\frac{1}{\sqrt{1.2}}+\frac{1}{\sqrt{2.3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+...$

4) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$

3. Xét sự hội tụ của các chuỗi

1) $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}(\frac{2}{5})^2+...+\frac{1}{n}(\frac{2}{5})^n+...$

2) $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+...+\frac{n+1}{2n+1}+...$

3) $\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt[3]{10}}+\frac{1}{\sqrt[4]{10}}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{10}}+...$

4) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}...+\frac{1}{(3n-1)^2}+...$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.5.8...(3n-1)}{1.5.9...(4n-3)}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$

*9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n-1}{2n-1})^n$

11) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$

*12) $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\ldots$

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$

18) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$

20) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n})$

21) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

*22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n n!}{n^n}$

*23) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$

*24) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

*25) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!.x^n}{(x+a_1)(2x+a_2)....(nx+a_n)}$

$$x > 0,\ a_n > 0,\ a_n \to a,\ a \neq x.$$

*26) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})...(2+\sqrt{n})}$

27) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^p n}$ $(p > 1)$

28) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n!}$

29) $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \int^{\frac{\pi}{n}} \dfrac{\sin^3 x}{1+x} dx$

*30) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1)$

4. Xét sự hội tụ tuyệt đối, hội tụ có điều kiện của các chuỗi

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$

*7) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots$

8) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{3^3} + \dots$

*9) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n^2$

10) $1 + \dfrac{1}{3^p} - \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{5^p} + \dfrac{1}{7^p} - \dfrac{1}{4^p} + \dots$

***5.** Xét sự hội tụ của các chuỗi

1) Tổng của $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+n}{3^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n - n}{3^n}$

2) Hiệu của $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$

3) Tích của $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}$

4) $\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dots + \dfrac{1}{2^{n-1}} + \dots\right)^2$

5) $\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \dots\right)^2$

6) Tích của $1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$; $1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$

6. Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\ln x}}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{-n\sin x}$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^5x^{2n}}$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n3^n(x-5)^n}$

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n+\frac{1}{2^nx^n})$

***7.** Nghiên cứu đặc tính hội tụ (đều, không đều) của các chuỗi hàm

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$ trong (-1, 1)

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$, $1+\delta<x<+\infty$, $\forall\delta>0$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$, $-\infty<x<+\infty$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ $0\le x\le 1$.

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $x \in (0, +\infty)$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$, $0 \le x \le 1$.

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$, $|x| < +\infty$

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}(x^n + x^{-n})$, $\frac{1}{2} \le x \le 2$

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n \sin\frac{1}{3^n.x}$, $0 < x < +\infty$

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x.\sin nx}{\sqrt{n+x}}$, $0 \le x < +\infty$

8. Dùng tính chất đạo hàm và tích phân được từng số hạng, tính tổng của các chuỗi.

1) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$

2) $1 - 3x^2 + 5x^4 + \ldots + (-1)^n(2n-1)x^{2n-2} + \ldots$

3) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \ldots + \frac{n}{x^n} + \ldots$

4) $1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}} + \ldots$

5) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} + \ldots$

***9.** Xác định miền tồn tại và tính khả vi của $f(x)$

1) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$

2) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|x|}{n^2 + x^2}$

3) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg \dfrac{x}{n^2}$, $|x| < +\infty$

***10.**

1) Xác định α để dãy $f_n(x) = n^{\alpha}xe^{-nx}$.

a) Hội tụ trên [0, 1]

b) Hội tụ đều trên [0, 1]

c) Có thể chuyển qua giới hạn dưới dấu tích phân.

2) Chứng minh $f_n(x) = nx(1 - x)^n$, hội tụ không đều trên [0, 1], nhưng ta vẫn có:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n \to \infty} f_n(x)dx$$

3) Tìm:

a) $\lim\limits_{x \to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \dfrac{x^n}{x^n + 1}$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{1 + nx^2}$

4) Tính tích phân của

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right) \text{ trên } [0, 1].$$

11. Tìm khoảng hội tụ của các chuỗi lũy thừa: (xét cả hai đầu mút):

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n.2^n}$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5x^{2n}}{2n+1}$

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^2.x^n$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}x^n$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!.x^n}{n^n}$

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^{n!}$

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n!\,x^{n!}$

11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^n}}{n^n}$

12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n.3^n}$

13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$

14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}.x^n$

15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}$, $a > 0$

16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} . x^n$

12. Khai triển theo chuỗi Taylor

1) $f(x) = \ln x$ tại lân cận điểm $x = 1$.

2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ tại lân cận điểm $x = -1$.

3) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ tại lân cận điểm $x = -4$.

4) $f(x) = e^x$ tại lân cận điểm $x = -2$.

5) $f(x) = \cos x$ tại lân cận điểm $x = \frac{\pi}{2}$

*6) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ theo chuỗi lũy thừa của $\frac{x}{1+x}$.

13. Khai triển theo chuỗi Maclaurin

1) $f(x) = a^x$.

2) $f(x) = \cos(x + a)$

3) $f(x) = \ln(2 + x)$

4) $f(x) = \frac{3x - 5}{x^2 - 4x + 3}$

5) $f(x) = \cos^2 x$.

6) $f(x) = \frac{x}{9 + x^2}$

7) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

8) $f(x) = \sin^2 x\cos^2 x$.

9) $f(x) = \int\limits_0^x e^{-x^2}dx$

10) $f(x) = \int\limits_0^x \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

11) $f(x) = \ln(1 + x + x^2 + x^3)$

*12) $f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$

*13) $f(x) = e^x\cos x$ (dùng công thức Euler)

*14) $f(x) = \dfrac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$

15) $f(x) = \text{ch}x$.

14. Tính gần đúng

1) $\sin 18^0$ với độ chính xác 10^{-5}.

2) $\sqrt[4]{19}$ với độ chính xác 10^{-3}

3) π với độ chính xác 10^{-4}

4) $\ln 3$ với độ chính xác 10^{-5}

5) $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ với độ chính xác 10^{-4}

6) $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ với độ chính xác 10^{-3}

7) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \sqrt[4]{1+x^3}dx$ với độ chính xác 10^{-4}

8) $\int\limits_{10}^{100} \dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$ với độ chính xác 10^{-3}

9) $\int\limits_0^1 x^x dx$ với độ chính xác 10^{-3}

10) $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$ với độ chính xác 10^{-2}

15. Áp dụng chuỗi, giải các phương trình vi phân

1) $y' = 2y + x \quad 1,\quad y\big|_{x=1} = y_0$

2) $y' = y^2 + x^3,\ y\big|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$

3) $(1-x)y' = 1 + x - y,\ y\big|_{x=0} = 0$

4) $xy'' + y = 0,\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1$

5) $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0,\ y\big|_{x=0} = 1,\ y'\big|_{x=0} = 0$

6) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x\cos t = 0,\quad x\big|_{t=0} = a,\quad \dfrac{dx}{dt}\bigg|_{t=0} = 0$

16. Khai triển theo chuỗi Fourier các hàm tuần hoàn chu kỳ 2π

1) $f(x) = \begin{cases} ax & \text{nếu } -\pi < x \le 0 \\ bx & \text{nếu } 0 < x < \pi \end{cases}$

2) $f(x) = \sin ax,\ -\pi < x < \pi.$

3) $f(x) = \operatorname{ch} ax,\ -\pi < x < \pi.$

4) $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2},\ 0 < x < 2\pi.$

17. Khai triển các hàm sau đây trên khoảng $(0, \pi)$ thành chuỗi Fourier:

1) $f(x) = e^{ax}$

a) dưới dạng sin.

b) dưới dạng cos.

2)

$$f(x) = \begin{cases} x \quad khi \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x \quad khi \quad \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

a) dưới dạng sin

b) dưới dạng cos.

3)

$$f(x) = \begin{cases} x \quad khi \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \quad khi \quad \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

dưới dạng sin.

4) $f(x) = x(\pi - x)$ dưới dạng sin.

5) $f(x) = x\sin x$ dưới dạng cos.

6)

$$f(x) = \begin{cases} \cos x \quad khi \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ -\cos x \quad khi \quad \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

dưới dạng cos.

18. Khai triển các hàm sau đây thành chuỗi Fourier

1) $f(x) = 2x$ trên $(0, 1)$.

2) $f(x) = \begin{cases} x \quad nếu \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 \quad nếu \quad 1 < x < 2 \\ 3 - x \quad nếu \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$

3) $f(x) = 10 - x$ trên $(5, 15)$.

4)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & khi \ \ \frac{3}{2} < x \le 2 \\ 3 - x & khi \ \ 2 < x < 3 \end{cases} \quad \text{trên } \left(\frac{3}{2}, 3\right)$$

dưới dạng cos.

***19.**

1) Cho $f(x + \pi) = -f(x)$ (phản tuần hoàn chu kỳ π). Tính các hệ số Fourier của $f(x)$ trên $(-\pi,\pi)$.

2) Biết các hệ số Fourier của hàm khả tích $f(x)$ chu kỳ 2π, tính các hệ số Fourier $\overline{a}_n$, $\overline{b}_n$ của hàm $f(x + h)$, h = const (hàm chệch).

***20.**

1) Tìm $g(x)$ nếu $\int\limits_0^{+\infty} g(z)\sin zx dz = f(x)$ và

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin x & nếu \ \ 0 \le x \le \pi \\ 0 \ \ nếu \ \ x > \pi \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x & nếu \ \ 0 \le x < \pi \\ \frac{-\pi}{4} \ \ nếu \ \ x = \pi \\ 0 \ \ nếu \ \ x > \pi \end{cases}$$

2) Chứng minh các hệ thức:

a) $$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos xt\,\frac{\sin at}{t}\,dt=\begin{cases}1 & nếu\ \ 0\le |x|<a\\ 0 & nếu\ \ |x|>a\\ \frac{1}{2} & nếu\ \ |x|=a\end{cases}$$

b) $$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin xt\,\frac{1-\cos t}{t}\,dt=\begin{cases}\operatorname{sign}x & nếu\ \ |x|<1\\ 0 & nếu\ \ |x|>1\\ -\frac{1}{2} & nếu\ \ x=-1\\ \frac{1}{2} & nếu\ \ x=1\end{cases}$$

c) $$\int_0^{+\infty}e^{-t^2}.\cos xt\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$$

***21.** Áp dụng phương pháp Fourier giải các bài toán :

1) Tìm dạng của 1 dây tại thời điểm t, nếu dây dao động tự do gắn chặt các đầu, độ lệch ban đầu $u\big|_{t=0}=0$, tốc độ ban đầu $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=1$ và độ dài của dây là l.

2) Tìm sự phân bố nhiệt độ trong một thanh độ dài là π nhiệt độ ban đầu của thanh là $u\big|_{t=0}=\varphi(x)$, đầu $x=0$ cách nhiệt, đầu $x=\pi$ có một nhiệt độ không đổi u_0.

TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP

1.

1) $S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$, $S=\frac{1}{4}$

2) $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, $S = 1$.

3) $S_n = \frac{1}{2}[\frac{1}{2} + (-1)^n(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})]$, $S = \frac{1}{4}$

4) $S = -\frac{5}{6}$

5) $S_{n+1} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x^{2^n}} - \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$

$S = \frac{1}{1-x}$ khi $|x| > 1$, $S = \frac{x}{1-x}$ khi $|x| < 1$.

$$\frac{x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^n}} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+x^{2^{n-1}}} - \frac{1}{1-x^{2^{n-1}}})$$

2.

1) Phân kỳ; $(S_{2n} - S_n > \frac{1}{2} > \varepsilon)$

2) Phân kỳ; $(S_{6n} - S_{3n} > \frac{1}{6})$

3) Phân kỳ; $(S_{2n} - S_n > \frac{1}{4})$

4) Hội tụ ; $(S_{n+p} - S_n < \frac{1}{n} < \varepsilon)$

3.

1) Hội tụ

2) Phân kỳ

3) Phân kỳ

4) Hội tụ

5) Hội tụ

6) Hội tụ

7) Hội tụ

8) Phân kỳ

9) Hội tụ ($u_n < \dfrac{1}{n^2 2^{\frac{n+1}{2}}} = V_n$).

10) Hội tụ

11) Hội tụ

12) Hội tụ ($u_n = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}$).

Đặt $\sqrt{2} = 2\cos\dfrac{\pi}{4}$, $u_n < \dfrac{\pi}{2^n}$)

13) Hội tụ

14) Hội tụ

15) Hội tụ

16) Phân kỳ

17) Phân kỳ

18) Phân kỳ

19) Hội tụ

20) Hội tụ

21) Hội tụ

22) Phân kỳ ($\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$)

23) Hội tụ ($u_n < \dfrac{1}{n^2}$)

24) Phân kỳ ($\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} : \frac{1}{n} \to 1$)

25) $x < a$: hội tụ, $x > a$ phân kỳ (dùng tiêu chuẩn Raabe)

26) Hội tụ (dùng tiêu chuẩn Raabe)

27) Hội tụ

28) Phân kỳ

29) Hội tụ

30) Hội tụ. ($u_n = e^{\frac{\ln n}{n^2+1}} - 1 = \frac{\ln n}{n^2+1} + \frac{0(\frac{\ln n}{n^2})}{n} \quad n \to \infty$)

4.

1) Hội tụ có điều kiện

2) Hội tụ tuyệt đối

3) Hội tụ có điều kiện

4) Hội tụ tuyệt đối

5) Hội tụ tuyệt đối

6) Hội tụ có điều kiện

7) Phân kỳ $u_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}-1}$, $u_{2k} = \frac{-1}{\sqrt{k+1}+1}$

Xét $\sum_{k=1}^{\infty}(u_{2k-1} + u_{2k})$

8) Phân kỳ ($u_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}$, $u_{2k} = \frac{-1}{3^k}$

Xét các chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} u_{2k-1}$ và $\sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}$)

9) Phân kỳ (chứng minh $\lim\limits_{n \to \infty} \sin n^2 \neq 0$)

10) Hội tụ tuyệt đối khi $p > 1$, hội tụ có điều kiện khi $p = 1$ phân kỳ khi $p \leq 0$ và $0 < p < 1$.

5.

1) Hội tụ

2) Hội tụ

3) Hội tụ

4) Hội tụ

5) Phân kỳ.

6) Hội tụ tuyệt đối

6.

1) Hội tụ tuyệt đối khi $x > 1$, phân kỳ khi $x \leq 1$.

2) Hội tụ tuyệt đối khi $x > e$.

Hội tụ không tuyệt đối khi $1 < x \leq e$, phân kỳ khi $x \leq 1$.

3) Hội tụ khi $-\infty < x < +\infty$.

4) Hội tụ tuyệt đối khi $x > 0$, phân kỳ khi $x \leq 0$.

5) Hội tụ tuyệt đối khi $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$

6) Hội tụ khi $x \geq 1$, $x \leq -1$.

7) Hội tụ khi $x \geq 5\frac{1}{3}$, $x < 4\frac{2}{3}$.

8) Hội tụ khi $-1 < x < -\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} < x < 1$.

7.

1) Hội tụ đều

2) Hội tụ đều

3) Hội tụ đều

4) Hội tụ đều

5) Hội tụ không đều

$$\left(\sup_{0<x<+\infty} |r_n(x)| = \sup_{0<x<+\infty} \left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| = +\infty\right)$$

6) Hội tụ không đều $\left(\sup_{0\le x\le 1} |S_n(x) - S(x)| = 1\right)$

7) Hội tụ đều (dùng tiêu chuẩn Weiertrass)

8) Hội tụ đều $\sup_{\frac{1}{2}\le x\le 2} (x^n + x^{-n}) = 2^n + \frac{1}{2^n} < 2^{n+1}$

9) Hội tụ không đều (dùng tiêu chuẩn Cauchy)

10) Hội tụ đều (dùng tiêu chuẩn Dirichlet)

8.

1) $\operatorname{arctg} x$, $|x| \le 1$

2) $\dfrac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $|x| < 1$

3) $\dfrac{x}{(x-1)^2}$, $|x| > 1$.

4) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$ (xét $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots$ tại $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$)

5) 3.

9.

1) $x \ne n$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(-1)^n}{(n+x)^2}$.

2) $-\infty < x < +\infty$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \operatorname{sign} x - x|x|}{(n^2 + x^2)^2}$, $x \neq 0$.

$f'(-0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, , $f'(+0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

vậy không khả vi tại $x = 0$.

3) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}$, , $-\infty < x < +\infty$.

10.

1)

a) $\forall \alpha$: $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$.

b) $\alpha < 1$.

c) $\alpha < 2$.

2) $f_n(x) \to 0$, $x \in [0, 1]$.

$$\left(\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{0 \le x \le 1} (nx(1-x)^n \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} \neq 0.$$

f_n hội tụ không đều. Nhưng $\lim_{n \to \infty} n \int_0^1 x(1-x)^n dx = 0$.

3)

a) $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $= \frac{1}{2} \ln 2$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

4) $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$

$$(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}})dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}$$

Việc tính tích phân từng số hạng là hợp lý).

11.

1) $-2 \leq x < 2$.

2) $-1 < x \leq 1$

3) $-1 < x < 1$

4) $-1 < x < 1$

5) $-4 < x < 4$

6) $-\infty < x < +\infty$

7) $-2 < x < 2$.

8) $-e < x < e$

9) $-1 < x < 1$.

10) $-1 < x < 1$

11) $-1 \leq x \leq 1$.

12) $2 < x \leq 8$.

13) $2 < x < 4$.

14) $4 < x < 4$.

15) Hội tụ tuyệt đối $-1 < x < 1$.

$x = \pm 1$: hội tụ tuyệt đối khi $a > 1$, phân kỳ khi $0 < a \leq 1$.

16) Hội tụ tuyệt đối khi $|x| < \frac{1}{4}$, $x = \pm\frac{1}{4}$ chuỗi phân kỳ.

12.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}, \quad 0 < x \le 2.$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n \ , \ -2 < x < 0$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}(2^{\,n-1}-3^{-n-1})(x+4)^n, \quad -6 < x < -2.$

4) $e^{-2}[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}], \ -\infty < x < +\infty$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-\frac{\pi}{2})^{2n-1}}{(2n-1)!}, -\infty < x < +\infty$

6) $\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\ldots+\frac{1.3.5.7\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n+$

13.

1) $f(x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\ln^n a}{n!},$

2) $f(x) = \cos a - x\sin a - \frac{x^2}{2!}\cos a+\frac{x^3}{3!}\sin a+\frac{x^4}{4!}\cos a+\ldots$

$$+\frac{x^n}{n!}\sin(a+(n+1)\frac{\pi}{2})+\ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

3) $f(x) = \ln 2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2.2^2}+\frac{x^3}{3.2^3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n.2^n} + \ldots, \ -2 < x < 2.$

4) $f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}(1+\frac{2}{3^{n-1}})x^n, \ -1 < x < 1.$

5) $f(x) = 1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}, -\infty < x < +\infty.$

6) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$, $-3 < x < 3$.

7) $f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n+1)}$, $-1 < x < 1$.

8) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{4n-3} x^{2n}}{(2n)!}$, $-\infty < x < +\infty$.

9) $f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n+1)n!}$, $-\infty < x < +\infty$.

10) $f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n(4n+1)n!} x^{4n+1}$, $-1 < x < 1$.

11) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n}$, $-1 < x \le 1$.

12) $f(x) = 2(|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!|x|^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)})$, $-1 \le x \le 1$.

13) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\sqrt{2})^n}{n!} \cos\frac{n\pi}{4}$, $-\infty < x < +\infty$.

14) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin n\alpha$, $-1 < x < 1$.

15) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $-\infty < x < +\infty$.

14.

1) 0,30902

2) 2,087

3) 3,1415

4) 1,09860

5) 0,7468

6) 0,621

7) 0,2505

8) 8,040

9) 0,783

10) 3,92

15.

1) $y = (y_0 + \frac{1}{4})e^{2(x-1)} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

2) $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \frac{21}{320}x^5 + \ldots$

3) $y = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \ldots, \ -1 \leq x \leq 1.$

4) $y = x - \frac{x^2}{(1!)^2.2} + \frac{x^3}{(2!)^2.3} - \frac{x^4}{(3!)^2.4} + \ldots, -\infty < x < +\infty.$

5) $y = \frac{\sin x}{x}$

6) $x = a\left(1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{2}{4!}t^4 - \frac{9}{6!}t^6 + \frac{55}{8!}t^8 - \ldots\right)$

16.

1) $\frac{b-a}{4}\pi - \frac{2(b-a)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} +$

$+ (a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$, $S(\pm\pi) = \frac{b-a}{2}\pi$

2) $\frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{a^2-n^2}$ với a không nguyên, $\sin ax$: nếu a nguyên.

$S(\pm\pi) = 0.$

3) $\frac{2sha\pi}{\pi}[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2+n^2}]$, $S(\pm\pi)=cha\pi$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$

17.

1)

a) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-1)^n e^{a\pi}]\frac{n\sin nx}{a^2+n^2}$

b) $\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}+\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n e^{a\pi}-1]\cos nx}{a^2+n^2}$

2)

a) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

b) $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$, $b_{2k}=(-1)^{k-1}.\frac{1}{2k}$, $b_{2k+1}=(-1)^k.\frac{2}{\pi(2k+1)^2}$

4) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$

5) $1-\frac{\cos x}{2}+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2-1}$

6) $\frac{4}{\pi}[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}]$

18.

1) $1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}$

2) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-\cos\dfrac{2n\pi}{3}}{n^2}\cos\dfrac{2n\pi x}{3}$, $0\le x\le 3$.

3) $\dfrac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\dfrac{\sin n\pi x}{5}$

4) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\cos\dfrac{2n\pi}{3}+\dfrac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{2n\pi x}{n^2}$,

19.

1) $a_0=0$, $a_{2n}=0$, $b_{2n}=0$, $n=1, 2, \ldots$

2) $\overline{a}_n=a_n\cos nh+b_n\sin nh$.

$\overline{b}_n=b_n\cos nh-a_n\sin nh$, $n=1,2\ldots$, $\overline{a}_0=a_0$

20.

1) (Xét biến đổi Foureir dưới dạng sin của hàm $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}f(x)$)

a) $g(x)=\dfrac{\sin\pi x}{1-x^2}$

b) $g(x)=\dfrac{x\sin\pi x}{1-x^2}$

21.

1) $u(x,t)=\dfrac{2l}{a\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\sin\dfrac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{l}$

Giải bài toán:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}\\ u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0\\ u\big|_{t=0}=0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=1\end{cases}$$

2) $U(x, t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x$

$$\lambda_n = \frac{2n+1}{2}, a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x) \cos \lambda_n dx - \frac{2u_0}{\pi\lambda_n}$$

(Giải bài toán $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \ \ u\Big|_{x=\pi} = u_0$$

Tìm u dưới dạng $u = u_0 + V$).

Phụ chương

CÁC CÔNG THỨC THÔNG DỤNG

I. Công thức lượng giác

1. $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}x \sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$

2. $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\cos\dfrac{n+1}{2}x \sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$

3. $\dfrac{1}{2} + \cos 2x + \cos 4x + \ldots + \cos 2nx = \dfrac{\sin(2n+1)x}{2\sin x}$

4. $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

5. $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

6. $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

7. $e^{x-iy} = e^x(\cos y - i\sin y)$

II. Bảng tích phân bất định

1) Hàm đại số

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

4. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\, \frac{x}{a} + C$

5. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

6. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

7. $I_{n+1} = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{x}{2na^2(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n$

8. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$

9. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

12. $\int \sqrt{\frac{a+x}{b+x}} dx = \sqrt{(a+x)(b+x)} + (a-b) \ln(\sqrt{(a+x)} + \sqrt{(b+x)}) + C$

13. $\int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}} dx = \sqrt{(a-x)(b+x)} + (a+b) \arcsin \sqrt{\frac{x+b}{a+b}}) + C$

14. $\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}} dx = -\sqrt{(a+x)(b-x)} - (a+b) \arcsin \sqrt{\frac{b-x}{a+b}}) + C$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$

2) Hàm siêu việt

16. $\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$

17. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$

18. $\int \sin ax dx = \frac{-\cos ax}{a} + C$

19. $\int \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a} + C$

20. $\int tgax dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| + C$

21. $\int \cot gax dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax| + C$

22. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \operatorname{cosec} x dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + C = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C$

23. $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C = \ln \operatorname{tg}|\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}| + C$

24. $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

25. $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

26. $\int \sin^n x dx = \frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-1} x dx$

27. $\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-1} x dx$

28. $\int \frac{dx}{\sin^n x} = \frac{-1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$

29. $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$

30. $\int \cos^m x \sin^n x dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n-1} x}{m+n}$

$$+\frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} \sin^n x dx \quad (m < n)$$

31. $\int \cos^m x \sin^n x dx = \frac{\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x}{m+n}$

$$+\frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \sin^{n-2} x dx \quad (m > n)$$

32. $\int \sin mx \sin nx dx = \frac{-\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C \quad (m \neq n)$

33. $\int \cos mx \cos nx dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C \quad (m \neq n)$

34. $\int \sin mx \cos nx dx = \frac{-\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C \quad (m \neq n)$

35. $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} arctg(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} tg\frac{x}{2}) + C \quad (a > b)$

36. $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{\sqrt{b-a} tg\frac{x}{2} + \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a} tg\frac{x}{2} - \sqrt{b+a}} + C \quad (a < b)$

37. $\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} arctg \frac{atgx+b}{\sqrt{a^2-b^2}}) + C \quad (a > b)$

38. $\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{atg\frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2-a^2}}{atg\frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2-a^2}}) + C \quad (a < b)$

39. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} arctg(\frac{btgx}{a}) + C$

40. $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = -\frac{1}{m-1} \frac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x}$

$+\frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x} \quad (m \neq 1)$

41. $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{1}{n-1} \frac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x}$

$+\frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2} x} \quad (n \neq 1)$

42. $\int \frac{dx}{a \cos^2 x + 2b \sin x \cos sx + c \sin^2 x}$

$= \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} arctg \frac{ctgx + b}{\sqrt{ac-b^2}} + C \quad ac - b^2 > 0 \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

43. $\int \frac{dx}{a + b \cos x + c \sin x} = \int \frac{dx}{a + \sqrt{b^2+c^2} \cos(x-\alpha)}$ (dạng 35, 36)

với $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$, $\sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$

44. $\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2+b^2} + C$

45. $\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2+b^2} + C$

46. $\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx + C$

47. $\int e^{ax} \cos^n x dx = \frac{e^{ax} \cos^{n-1} x(a \cos x + n \sin x)}{a^2+n^2}$

$+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2} \int e^{ax} \cos^{n-1} x dx$

48. $\int shaxdx = \frac{1}{a} chax + C$

49. $\int ch ax dx = \frac{1}{a} sh ax + C$

50. $\int th x dx = \ln ch x + C$

51. $\int \coth x dx = \ln | sh x | + C$

52. $\int \frac{dx}{sh x} = \ln | th \frac{x}{2} | + C$

53. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = th x + C$

54. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -\coth x + C$

55. $\int sh^2 x dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} sh 2x + C$

56. $\int ch^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} sh 2x + C$

57. $\int x^n \ln x dx = x^{n-1} [\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}] + C$

58. $\int \ln^n x dx = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x dx$

59. $\int x^m \ln^n x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln^n x - \frac{n}{m+1} \int x^m \ln^{n-1} x dx$

III. Bảng tích phân xác định

1. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \times \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{với} \quad n = 2m \\ 1 & \text{với} \quad n = 2m+1 \end{cases}$

2. $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{2n} x dx = (-1)^n [\frac{\pi}{4} - (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1})]$

3. $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{2^n}{n}\right)$

4. $L_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n x \cos nx dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}$

5. $H_{k,m} = \int_0^1 x^k \ln^m x dx = (-1)^m \frac{m!}{(k+1)^{m+1}}$

6. $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$

(Hàm Beta hay tích phân Euler loại I)

7. $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^2 x dx = \frac{(2m)!(2n)!\pi}{2^{2n+2m+1} m! n! (m+n)!}$ $(n, m, k \in N)$

8. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (tích phân Gauss)

9. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ (tích phân Dirichlet)

10. $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (tích phân Fresnel)

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$

12. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1-x^2} dx = -\frac{\pi^2}{4}$

13. $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{6}$

14. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx = -\frac{\pi^2}{8}$

15. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}dx = -\frac{\pi^2}{12}$

16. $\int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos x + a^2)dx = \begin{cases} 0 & \textit{nếu} \quad |a| \le 1 \\ \pi & \textit{nếu} \quad |a| > 1 \end{cases}$

17. $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-x)^{q-1}dt$

($p, q > 0$, tích phân Euler loại 1 hay hàm Beta)

$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-t}dt$, $p > 0$ tích phân Euler loại 2 hay hàm Gamma)

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p, q > 0$$

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}dt = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1.$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}, \quad n \in N$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} \qquad \text{(Gauss)}$$

$x \neq 0$, x khác một số nguyên âm

18. $\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2\delta^2}} dx = \frac{2^n \delta^{2n}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \begin{cases} 1 & \textit{nếu} \quad n = 0 \\ \delta^2 & \textit{nếu} \quad n = 1 \\ 3\delta^4 & \textit{nếu} \quad n = 2 \\ 15\delta^6 & \textit{nếu} \quad n = 3 \end{cases}$

Tích phân Fourier

19. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{a^2+t^2}dt = \frac{\pi}{2a}e^{-ax}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t\sin xt}{a^2+t^2}dt = \frac{\pi}{2}e^{-ax}$

Tích phân Laplace

20. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-at}\cos xt\,dt = \dfrac{a}{a^2+x^2}$

21. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-at}\sin xt\,dt = \dfrac{x}{a^2+x^2}$

22. $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}\cos xt\,dt = e^{-\frac{x^2}{2}}$

23. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos xt}{ch t}\,dt = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{ch\dfrac{\pi x}{2}}$

24. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos xt}{ch^2 t}\,dt = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{x}{sh\dfrac{\pi x}{2}}$

25. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{t\cos xt}{sh t}\,dt = \dfrac{\pi^2}{4}\dfrac{x}{ch^2\dfrac{\pi x}{2}}$

26. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin xt}{sh t}\,dt = \dfrac{\pi}{2}\,th\dfrac{\pi x}{2}$

27. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos xt}{t^p}\,dt = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{|x|^{p-1}}{\Gamma(p)\cos\dfrac{\pi p}{2}} = |x|^{p-1}\,\Gamma(1-p)\sin\dfrac{\pi p}{2}$,

$x \neq 0,\ 0 < p < 1.$

28. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin xt}{t^p}\,dt = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{x^{p-1}}{\Gamma(p)\sin\dfrac{\pi p}{2}} = x^{p-1}\Gamma(1-p)\cos\dfrac{\pi p}{2}$, $x > 0,\ 0 < p < 1$

29. $\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin xt}{t}\,dt = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad x > 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0 \\ -1 & \text{nếu} \quad x < 0 \end{cases}$

30. $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\cos xt dt = \begin{cases} 1 & nếu \quad |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & nếu \quad |x| = 1 \\ 0 & nếu \quad |x| > 1 \end{cases}$

31. $\int\limits_0^1 \cos xt dt = \frac{\sin x}{x}$

32. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}\cos xt dt = \begin{cases} 1-|x| & nếu \quad |x| < 1, \\ 0 & nếu \quad |x| \geq 1 \end{cases}$

33. $\int\limits_0^1 (1-t)\cos xt dt = 2\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

34. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}\sin xt dt = \frac{|1+x|-|1-x|}{2}$

IV. Chuỗi

1) Chuỗi số

1. $1+\frac{1}{2^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}+\ldots \qquad s > 1$, chuỗi Riemann

2. $\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$

3. $\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots$

4. $\frac{\pi^2}{6} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$

5. $\frac{\pi^2}{8} = 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\ldots$

6. $\frac{\pi^2}{12} = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\ldots$

7. $\dfrac{\pi^4}{90} = 1 + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} + \dots + \dfrac{1}{n^4} + \dots$

8. $\dfrac{\pi^6}{945} = 1 + \dfrac{1}{2^6} + \dfrac{1}{3^6} + \dots + \dfrac{1}{n^6} + \dots$

2) Chuỗi lũy thừa

9. $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + \dots \quad (|x| < +\infty)$

10. $\sin x = 1 - \dfrac{x^3}{3!} + \dots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (|x| < +\infty)$

11. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (|x| < +\infty)$

12. $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \dots$

$+ \dfrac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)x^n}{n!} + \dots \quad (|x| < 1)$

13. $\dfrac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \ (|x| < 1)$

14. $\dfrac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \dots \ (|x| < 1)$

15. $\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \dots \ (-1 < x \le 1)$

16. $\dfrac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots (-1)^n x^{2n} + \dots \ (|x| < 1)$

17. $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \ (|x| < 1)$

18. $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \dfrac{1.x^2}{2.1!} + \dfrac{1.3x^4}{2^2.2!} + \dots + \dfrac{1.3.5\dots(2n-1)x^{2n}}{2^n.n!} + \dots \ (|x| < 1)$

19. $\arcsin x = x + \frac{1.x^3}{2.1!.3} + \frac{1.3x^5}{2^2.2!.5} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)x^{2n}}{2^n\, n!.(2n+1)} + \ldots \quad |x| < 1$

Chuỗi Fourier

1. $\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots \quad 0 < x < 2\pi$

2. $-\ln \sin \frac{x}{2} = \ln 2 + \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n} + \ldots$

   $0 < x < 2\pi \quad (x \neq 2\pi k)$

3. $\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} + \ldots \quad 0 < x < \pi$

4. $\frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots \quad -\pi < x < \pi$

5. $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \ldots] \quad |x| \leq \pi$

6. $\frac{(\pi - x)^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots] \quad |x| \leq \pi$

7. $\frac{\pi}{4}(\pi - x) = \frac{\pi^2}{8} + \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \ldots] \quad |x| \leq \pi$

8. $x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4[\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2} + \ldots] \quad |x| \leq \pi$

9. $|\cos x| = \frac{4}{\pi}(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} + \ldots)$

10. $|\sin x| = \frac{4}{\pi}(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{3} - \ldots - \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} + \ldots)$

11. $\frac{\pi \cos ax}{2a \sin a\pi} = \frac{1}{2a^2} - \frac{\cos x}{a^2 - 1} + \ldots + (-1)^n \frac{\cos nx}{a^2 - n^2} + \ldots$

    $|x| < \pi$; a không nguyên.

12. $\dfrac{\pi ch a x}{2a sh a\pi} = \dfrac{1}{2a^2} - \dfrac{\cos x}{a^2+1} + \ldots + (-1)^n \dfrac{\cos nx}{a^2+n^2} + \ldots$

$|x| < \pi$; a không nguyên.

13. $\dfrac{1-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2} = 1 + 2x\cos\theta + \ldots + 2x^n\cos n\theta + \ldots \quad |x| < 1.$

14. $\dfrac{x\cos\theta - x^2}{1-2x\cos\theta+x^2} = x\cos\theta + \ldots + x^n\cos n\theta + \ldots \quad |x| < 1$

15. $\dfrac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2} = x\sin\theta + \ldots + x^n\sin n\theta + \ldots \quad |x| < 1.$

16. $-\dfrac{1}{2}\ln(1-2x\cos\theta+x^2) = x\cos\theta + \ldots + x^n\dfrac{\cos n\theta}{n} + \ldots,$

$|x| < 1$, $x = 1$, trừ vài hệ số của θ.

17. $arctg\,\dfrac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta} = x\sin\theta + \ldots + x^n\dfrac{\sin n\theta}{n} + \ldots$

$|x| < 1$, $|x| = 1$, trừ vài hệ số θ.

V. Các hàm đặc biệt

1. Phương trình Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0.$$

khi $\lambda = n(n+1)$, phương trình có nghiệm là đa thức Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

Các đa thức $P_n(x)$ trực giao trên [-1, 1], nghĩa là:

$$\int_1^1 P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad n \neq m \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{nếu} \quad n \neq m \end{cases}$$

2. Phương trình Hermite

$$y'' + (\lambda - x^2)y = 0$$

khi $\lambda = 2n + 1$, phương trình có nghiệm là $e^{\frac{-x^2}{2}} H_n(x)$ là các đa thức Hermite.

$$H_n(x) = \frac{1}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n(e^{\frac{x^2}{2}})}{dx^n}$$

trực giao trên $(-\infty, +\infty)$ với hàm trọng lượng $e^{\frac{x^2}{2}}$ nghĩa là

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{x^2}{2}} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m \neq n \\ \dfrac{\sqrt{2\pi}}{n} & \text{nếu } m = n \end{cases}$$

$H_n(x)$ là nghiệm của phương trình $y'' - 2xy' \quad 2ny = 0$.

3. Phương trình Laguerre

$$xy'' + y' + (\lambda - \frac{x}{4})y = 0$$

khi $\lambda = n + \frac{1}{2}$ phương trình có nghiệm là $e^{\frac{-x^2}{2}} L_n(x)$.

$L_n(x)$ là các đa thức Laguerre

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}$$

trực giao trên $(0, +\infty)$ với làm trọng lượng e^{-x} nghĩa là

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m \neq n \\ 1 & \text{nếu } m = n \end{cases}$$

$L_n(x)$ là nghiệm của phương trình $xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$

4. Phương trình Tchebichef

$$(1 - x^2)y'' \cdot xy' + \lambda y = 0$$

khi $\lambda = n^2$ phương trình có nghiệm là

$$\frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}; \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x)$$

là da thức Tchebichef, trực giao trên (-1, 1) với hàm trọng lượng $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

nghĩa là:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0 & nếu \quad m \neq n \\ 2^{\frac{\pi}{2n-1}} & nếu \quad m = n \end{cases}$$

5. Phương trình Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0$$

có nghiệm là hàm Bessel.

$$J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{1}{\Gamma(\lambda + n + 1)}$$

Đặc biệt $\lambda = k \in N$:

$$J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^k [\frac{1}{k!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \ldots]$$

$$\lambda = 0 \quad J_0(x) = 1 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \ldots$$

Các hàm $J_k(x)$ là trực giao trên đoạn [0, 1] với hàm trọng lượng x.

6. Chuỗi theo các hàm đặc biệt

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad |t| < 1, \ |x| \leq 1.$$

$$e^{\frac{-t^2}{2}+tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

$$\frac{1}{1-t}e^{-\frac{tx}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}L_n(x) \quad |t| < 1$$

$P_n(x)$, $H_n(x)$, $L_n(x)$ là các đa thức Legendre, Hermite, Laguerre.

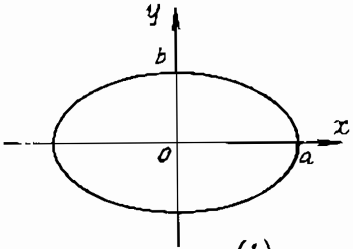
$$\cos(x\sin\theta) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(x)\cos 2n\theta$$

$$\sin(x\sin\theta) = 2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n-1}(x)\sin(2n-1)\theta$$

$J_n(x)$ là hàm Bessel cấp $n \in N$.

VI: Đường và mặt

1. Ellipse



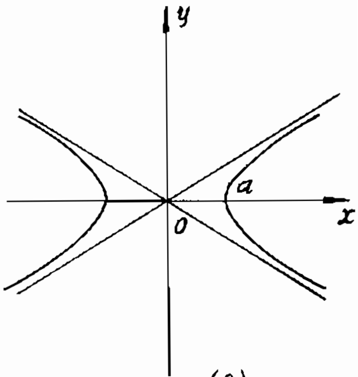
(1)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (1)$$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

$a = b$: đường tròn tâm O.

2. Hyperbole



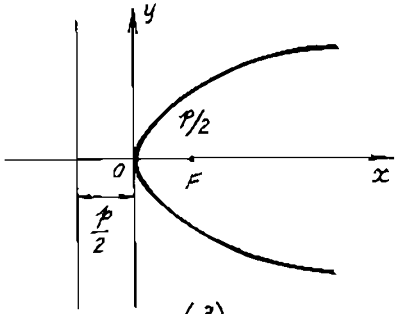
(2)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (2)$$

$$\begin{cases} x = acht \\ y = bsht \end{cases}$$

3. Parabole

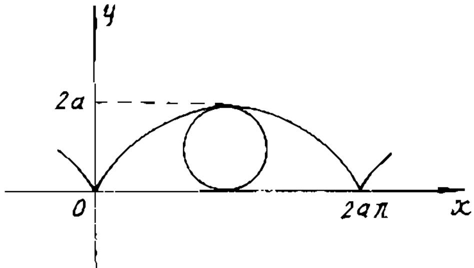
$y^2 = 2px \quad (3)$



(3)

4. Cycloide

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ x = a(t - \cos t) \end{cases} \quad (4)$$



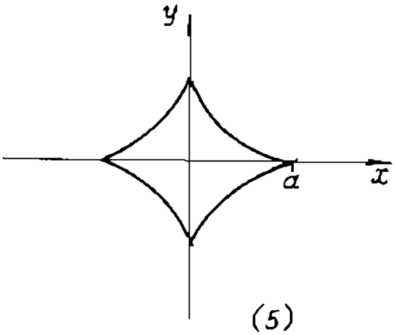
(4)

5. Astroide

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a.sin^3 t \end{cases} \quad (5)$$

hay

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$



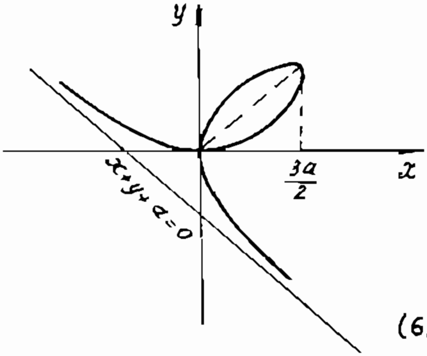
(5)

6. Lá Descartes

$x^3 + y^3 = 3axy$ (6)

hay

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$

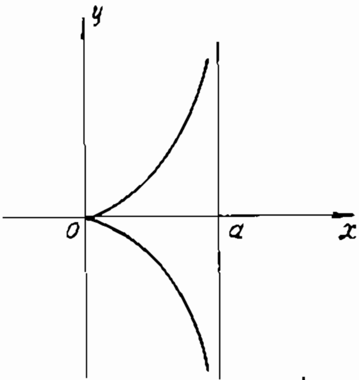


(6)

7. Cissoide của Dioclès

$$y^2 = \frac{x^3}{a-t} \quad (7)$$

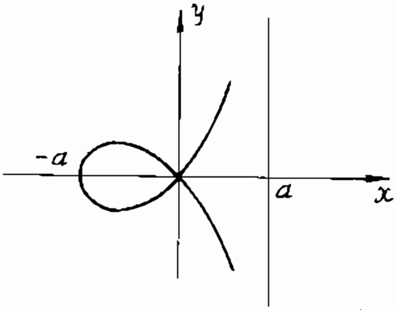
hay $\begin{cases} x = \dfrac{at^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{at^3}{1+t^2} \end{cases}$



(7)

8. Strophoide

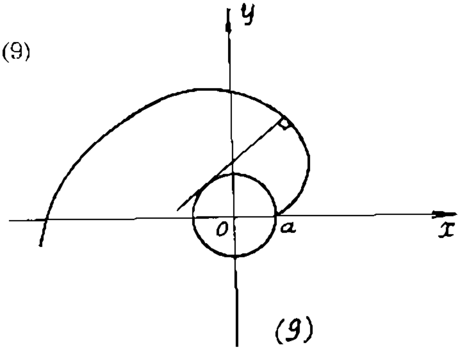
$$y^2 = x^2\,\frac{a+x}{a-x} \quad (8)$$



(8)

9. Tác bế của đường tròn

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = b(\sin t - t\cos t) \end{cases} \quad (9)$$

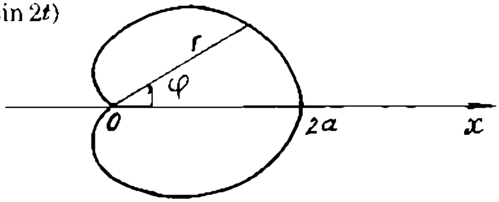


(9)

10. Cardioide

$r = a(1 + \cos\varphi)$ (10)

$$\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$$

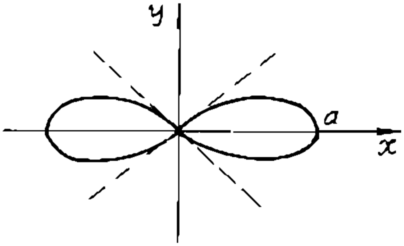


(10)

11. Lemniscate của Bernoulli

$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (11)

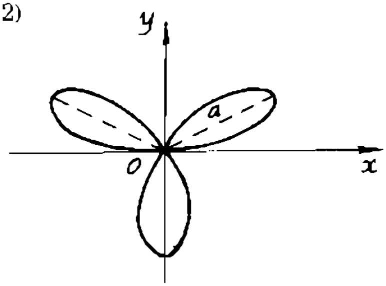
hay $r^2 = a^2\cos 2\varphi$



(11)

12. Hoa hồng ba cánh

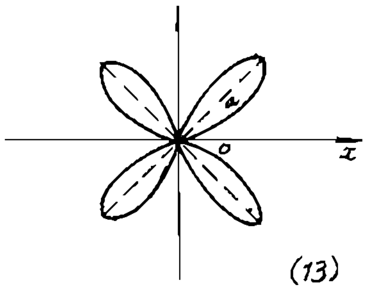
$r = a\sin 3\varphi$ $(r \geq 0)$ (12)



(12)

13. Hoa hồng bốn cánh

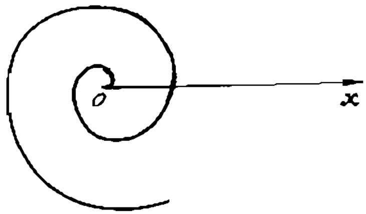
$r = a|\sin 2\varphi|$ (13)



(13)

14. Xoắn ốc Archimede

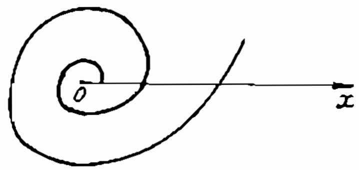
$r = a\varphi$ $(r \geq 0)$ (14)



(14)

15. Xoắn ốc Logarithme

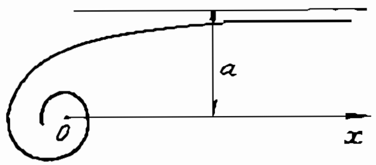
$r = e^{a\varphi}$ (15)



(15)

16. Xoắn ốc Hyperbole

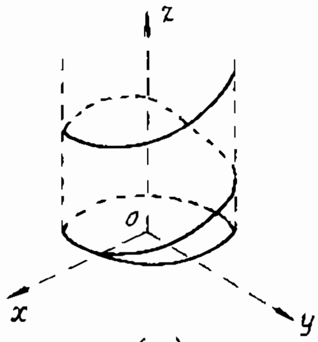
$r = \dfrac{a}{\varphi}$ $(r > 0)$ (16)



(16)

17. Đinh ốc trụ tròn xoay

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases} \quad (17)$$



(17)

18. Đường bậc hai

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

a) $\delta = AC - B^2 > 0$: Ellipse thực; ảo; hai đường thẳng ảo cắt nhau tại một điểm thực.

b) $\delta = AC - B^2 < 0$: Hyperbole; hai đường thẳng thực cắt nhau

c) $\delta = AC - B^2 = 0$: Parabole; hai đường thẳng song song, thực hoặc ảo, phân biệt hoặc trùng nhau.

Đặc biệt $A = C$, $B = 0$: đường tròn thực hoặc ảo, phương trình chính tắc: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ (tâm (a, b), bán kính R).

19. Mặt phẳng

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

20. Đường thẳng

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

hay

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

21. Mặt cầu (thực hoặc ảo)

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

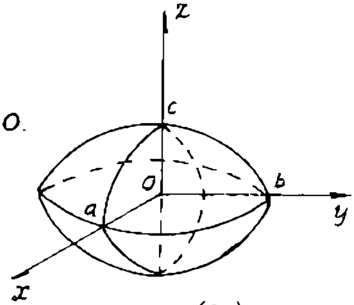
phương trình chính tắc:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ (tâm (a, b, c), bán kính R).

22. Ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (22)$$

Đặc biệt $a = b = c$: mặt cầu tâm O.

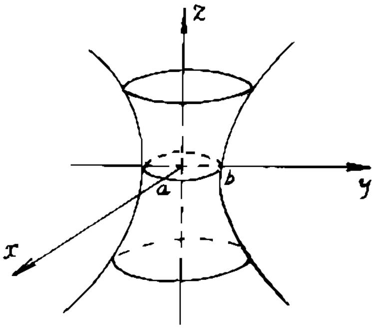


(22)

23. Hyperboloide một tầng

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (23)$$

$a = b$: tròn xoay

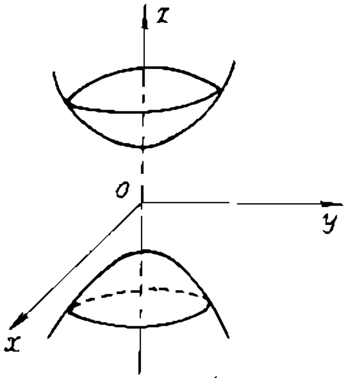


(23)

24. Hyperboloide hai tầng

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (24)$$

$a = b$: tròn xoay

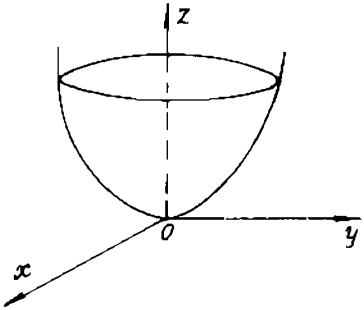


(24)

25. Paraboloide elliptique

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \quad (25)$$

$p = q$: tròn xoay



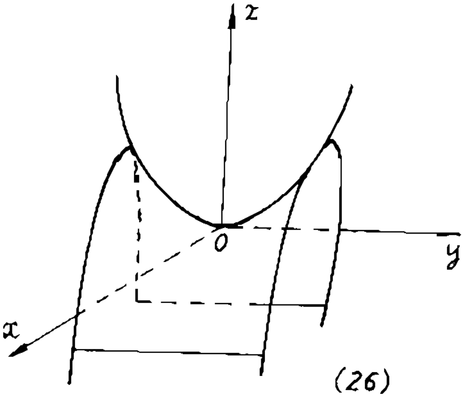
(25)

26. Paraboloide Hyperbolique

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} \quad (26)$$

hay

$Z = XY$.

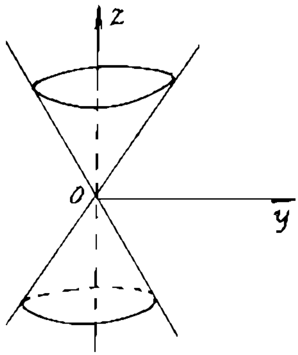


(26)

27. Mặt nón

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (27)$$

$a = b$: nón tròn xoay



(27)

28. Mặt trụ

$F(x, y) = 0$: đường sinh // Oz.

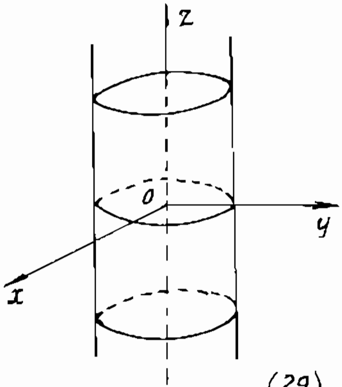
$F(y, z) = 0$: đường sinh // Ox.

$F(x,, z) = 0$: đường sinh // Oy.

29. Mặt trụ Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (29)$$

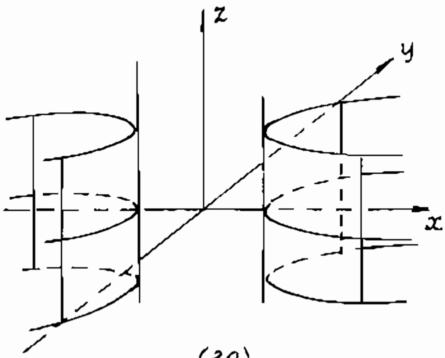
$a = b$: mặt trụ tròn xoay



(29)

30. Mặt trụ Hyperbole

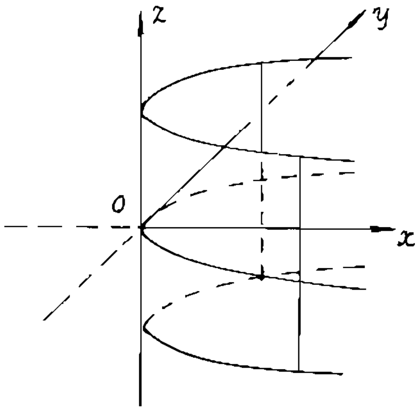
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (30)$$



(30)

31. Mặt trụ Parabole

$y^2 = 2px$ (31)



(31)

VII. BẢNG HÀM GAMMA

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \text{ với } 1 \le x \le 2$$

(với các giá trị khác sử dụng công thức $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$)

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	1,25	,90640	1,50	,88623	1,75	,91906
1,01	,99433	1,26	,90440	1,51	,88659	1,76	,92137
1,02	,98884	1,27	,90250	1,52	,88704	1,77	,92376
1,03	,98355	1,28	,90072	1,53	,88757	1,78	,92623
1,04	,97844	1,29	,89904	1,54	,88818	1,79	,92877
1,05	,97350	1,30	,89747	1,55	,88887	1,80	,93138
1,06	,96874	1,31	,89600	1,56	,88964	1,81	,93408
1,07	,96415	1,32	,89464	1,57	,89049	1,82	,93685
1,08	,95973	1,33	,89338	1,58	,89142	1,83	,93969
1,09	,95546	1,34	,89222	1,59	,89243	1,84	,94264
1,10	,95136	1,35	,89115	1,60	,89352	1,85	,94561
1,11	,94740	1,36	,89018	1,61	,89468	1,86	,94869
1,12	,94359	1,37	,88931	1,62	,89592	1,87	,95184
1,13	,93993	1,38	,88854	1,63	,89724	1,88	,95507
1,14	,93642	1,39	,88785	1,64	,89864	1,89	,95838
1,15	,93304	1,40	,88726	1,65	,90012	1,90	,96177
1,16	,92980	1,41	,88676	1,66	,90167	1,91	,96523
1,17	,92670	1,42	,88636	1,67	,90330	1,92	,96788
1,18	,92373	1,43	,88604	1,68	,90500	1,93	,97240
1,19	,92089	1,44	,88581	1,69	,90678	1,94	,97610
1,20	,91817	1,45	,88566	1,70	,90864	1,95	,97988
1,21	,91558	1,46	,88560	1,71	,91057	1,96	,98374
1,22	,91311	1,47	,88563	1,72	,91258	1,97	,98768
1,23	,91075	1,48	,88575	1,73	,91467	1,98	,99171
1,24	,90852	1,49	,88595	1,74	,91683	1,99	,99581
						2,00	1,00000

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Ia.S.Bugrov, S.M.Nikolski, *Matemática para Engenharia* (1987)

[2] Raymond Couty. *Analyse* (1970)

[3] T.Bass, *Cours de Mathematiques* (1964)

[4] M.Nicocescu, *Analiza mamematica* (1970)

[5] SzeTenshu, *Elements of real analysis* (1978)

[6] G.Lefor, *Toán cao cấp dùng cho học sinh* (1972)

[7] Lesieur, *Toán cao cấp dùng cho đại học kỹ thuật* (1972)

[8] Trần Bình, *Bài giảng toán cao cấp* (1968)

[9] Nguyễn Đình Trí, *Toán cao cấp* (1985)

[10] Hoàng Tụy, *Giải tích hiện đại* (1979)

[11] B.Demidovitch, *Problemas e exercicios de Análize Matemática* (1977)

[12] V.Smirnov, *Cours de mathématiques Supérieures* (1970)

[13] Г.М.Фихмензолы, Курс диФФеренциального и интегрального исчисления (1962)

[14] В.Немышкий, Курс Математического Анализа (1957)

[15] А.И.Маркушебич. Теория Аналитических Функций (1967)

[16] И.И.Ляшко, Математический Анализ (В примерах и задачх) (1978)

[17] Ю.С.Очан, Математический Анализ (1961)

[18] Пискунов. Курс дифференциального и интегрального исчисления (1982)

[19] А.Г.Курош. Курс высшей алгебры (1965)

[20] Н.М. Матвеев. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям (1960)

GIẢI TÍCH II + III

PHÉP TÍNH VI PHÂN & TÍCH PHÂN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Dùng cho sinh viên kỹ thuật

(Cao đẳng, đại học, sau đại học)

(In lần thứ tư có sửa chữa, bổ sung)

Tác giả: TRẦN BÌNH

Chịu trách nhiệm xuất bản: TS. PHẠM VĂN DIỄN
Biên tập: NGỌC KHUÊ
Thiết kế bìa: ĐẶNG NGỌC QUANG

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 Trần Hưng Đạo - Hà Nội

In 700 cuốn, khổ 14,5 x 20,5cm, tại Xưởng in NXB Văn hoá Dân tộc
Số đăng ký KHXB: 209-2009/CXB/3.2-10/KHKT ngày 18/3/2009
Quyết định xuất bản số: 236/QĐXB-NXBKHKT ngày 10/8/2009
In xong và nộp lưu chiểu Quý III năm 2009.

209220 M04

Giải tích 2 và 3 (phép tính vi

0610090000030

88,000

Giá: 88.000đ